高等学校教学参考书

数学物理方程及其数值解法

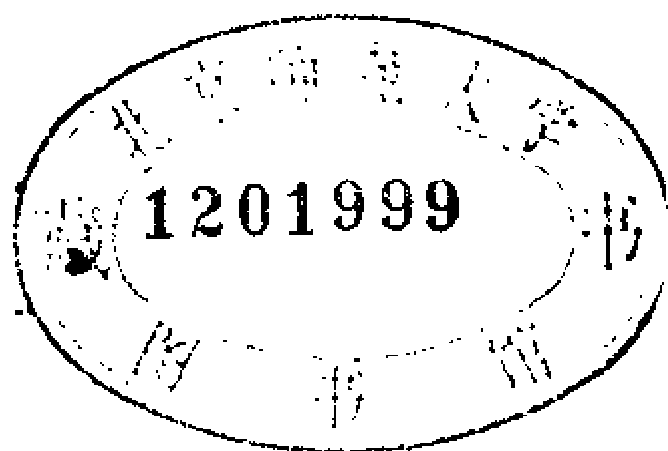
高应才 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

数学物理方程及其数值解法

高应才 编



高等教育出版社

本书是在1962～1963年高等工业学校的数学物理方程教学大纲编写的讲义基础上，根据作者多年来教学实践经验修改而成的。考虑到工科院校要求较高的专业的需要，故又写进了不属于大纲的内容，供选用。

本书共九章。第一章导出三种典型偏微分方程；第二章至第五章阐述三类典型方程的古典解法——分离变量法，积分变换法，达朗倍尔法，格林函数法；第六章至第八章讲的是三类典型方程的有限差分法和有限元法；第九章为二阶线性偏微分方程的分类等。

本书可作为高等工科院校教学用书；也可作为非数学专业要求低的理科性专业、工科研究生等的教学用书；对一般工程技术人员也有一定的参考价值。

高等学校教学参考书

数学物理方程及其数值解法

高应才 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.75 字数 235,000

1983年9月第1版 1984年5月第1次印刷

印数 00,001—12,500

书号 13010·0944 定价 1.50 元

序　　言

本书是在1962～1963年高等工业学校本科(五年制)高等数学(结合无线电专业部分)的数学物理方程教学大纲(参考草案)编写的讲义基础上，根据多年来教学实践的经验修改而成的. 同时考虑到工科院校中要求较高的专业的需要，使具有广泛的适应性，故又写进了不属于大纲范围之内的内容，供其选用.

由于当代工程技术科学飞跃发展，计算机的广泛使用，愈来愈迫切需要偏微分方程的数值解法去为它解算各种实际问题，因此在工科院校所适用的数学物理方程教材中，应该包含有一定比例的偏微分方程数值解法的内容.

本书第一章导出的三种典型偏微分方程，是自然界中物理、力学、热学、电学等现象的共同本质的数学方法的描述. 第二章至第五章阐述三类典型方程的古典解法——分离变量法，积分变换法，达朗倍尔法，格林函数法，它们在一般基础理论和工程技术领域中用处最多，是最为广泛的经典方法. 第六章至第八章讲的是三类典型方程的有限差分法和有限元法，它们是当代工程技术领域中使用最多、最广泛的一种数值近似解法. 第九章是希望学完这门课程后，对数学物理方程有一个概括性的认识. 本书的前五章约用30学时可以讲完，第六章至第八章约用18至20学时可以讲完，第九章约用4学时可以讲完. 如果在课程安排上有更充裕的时间，就可把包括小字与*在内的全部内容讲完. 如选用本书作为教材可根据具体情况予以取舍.

本书是以求解方法分章的，内容比较适合高等工科院校作为教材或教学参考书. 尤其适用于作为偏微分方程要求高的工科性

专业和非数学专业要求低一些的理科性专业、工科研究生等的教学用书。本书对一般工程技术人员以及从事数学工作的同志也有一定的参考价值。本书各章彼此有相对的独立性，因此教师可以选教，自学者可以选学。

本书编写过程中尽量做到由浅入深，由易到难，由简到繁的循序渐进的原则，当联系到高等数学基础及其它有关部分时，都在每章附录中给予说明，便于读者自学。

本书各章后都附有习题，大致分为两类，第一类是紧密结合本书内容的，通过这些习题的练习，可以掌握和加深对本门课程的理解。第二类是比较困难的，对于这些习题都给了提示，可供参考。本书末还附有习题答案。

本书编写过程中，吴振国同志为数值解法部分编写了计算框图，计算了数值结果，陈蕴刚和雷俊江同志为习题答案作了仔细校验，对他们的辛勤劳动，在此表示衷心的感谢。由于编者水平的限制，书中一定还有许多缺点，殷切地期望读者给予批评指教。

编者　1982.10.

目　　录

第一章　三类典型偏微分方程的提出定解问题

在力学、物理、工程技术和其它自然科学中，经常提出许多偏微分方程的问题，数学物理方程就是以这些问题作为研究对象．本节就几个具体问题建立三类典型方程，并相应地提出定解条件和定解问题等概念．

§1-1　三类典型偏微分方程的提出

1　均匀弦的横振动方程

设有一根端点固定的拉紧的弦，长度为 l，它是细小的，弹性的，可以自由弯曲的．所谓弹性的是指弦中发生的张力的值，可以按虎克定律计算，自由弯曲是表示弦不抵抗弯曲，在数学上就是说，弦中任意点处张力的方向，总是沿着弦在该点的切线方向．另外，我们还假设作用于弦上的张力 T_0 是相当大的，它使得重力的影响可以忽略不计．再假设弦在平衡状态下是位于正向 x 轴上，如图 1-1．

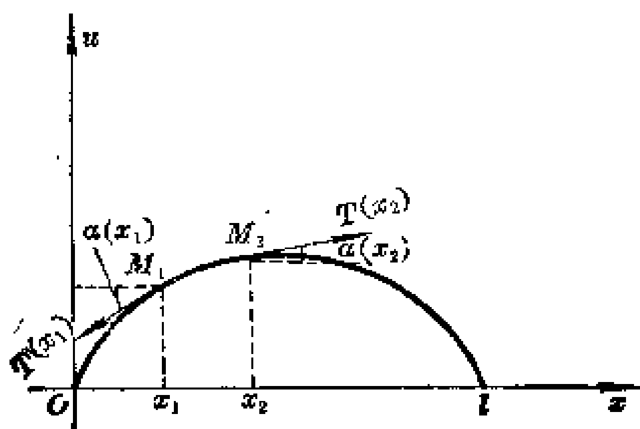


图　1-1

现在我们研究弦的横振动．设弦的运动发生在同一平面内，弦上所有的点都在垂直于 x 轴的方向上运动．因此，可以用 $u(x, t)$ 表示于时间 t 在 x 处弦上点的偏位移．这样，对于每一个固定的时间 t，显然函数 $u(x, t)$ 的图形就是弦在这一时间 t 的形状．

设弦的振动很微小，就是说，导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的平方项与单位 1 比较，可以忽略不计．我们在弦上任取一小段 (x_1, x_2)，设它在时间 t 变成为弧段 $\widehat{M_1M_2}$，此时它的长度为

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx\approx x_2-x_1=s_0$$

于是，在上述允许的精确度之内，便可以认为弦在振动过程中，长度没有发生变化．因此，由虎克定律可知，弦上每点张力 T 的数值是不随时间 t 变化的．另外，我们还可以证明张力 T 的数值也不随 x 变化，就是说，$T\approx T_0=$ 常数．事实上，因为作用在弧段 $\widehat{M_1M_2}$ 上有沿着端点 M_1 与 M_2 的切线方向的张力、外力和惯性力，所有这些力在 x 轴方向上的分力的总和要等于零，又因为我们研究的是横振动，所以外力和惯性力都平行于 u 轴．因此，

$$T(x_1)\cos\alpha(x_1)-T(x_2)\cos\alpha(x_2)=0$$

其中 $\alpha(x)$ 是曲线 $u(x, t)$ 上横坐标为 x 处，时间为 t 的点 M 处切线与 x 轴的交角．

又因为我们假设弦做微小振动，所以

$$\cos\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha(x)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\approx 1$$

从而得出 $T(x_1)\approx T(x_2)$．其中 x_1 与 x_2 是可以任意选择的，所以张力 T 的数值不依赖于 x．因此，T 既不依赖于时间 t，又不依赖

第一章　三类典型偏微分方程的提出定解问题

在力学、物理、工程技术和其它自然科学中，经常提出许多偏微分方程的问题，数学物理方程就是以这些问题作为研究对象. 本节就几个具体问题建立三类典型方程，并相应地提出定解条件和定解问题等概念.

§1-1　三类典型偏微分方程的提出

1　均匀弦的横振动方程

设有一根端点固定的拉紧的弦，长度为 l，它是细小的，弹性的，可以自由弯曲的. 所谓弹性的是指弦中发生的张力的值，可以按虎克定律计算，自由弯曲是表示弦不抵抗弯曲，在数学上就是说，弦中任意点处张力的方向，总是沿着弦在该点的切线方向. 另外，我们还假设作用于弦上的张力 T_0 是相当大的，它使得重力的影响可以忽略不计. 再假设弦在平衡状态下是位于正向 x 轴上，如图 1-1.

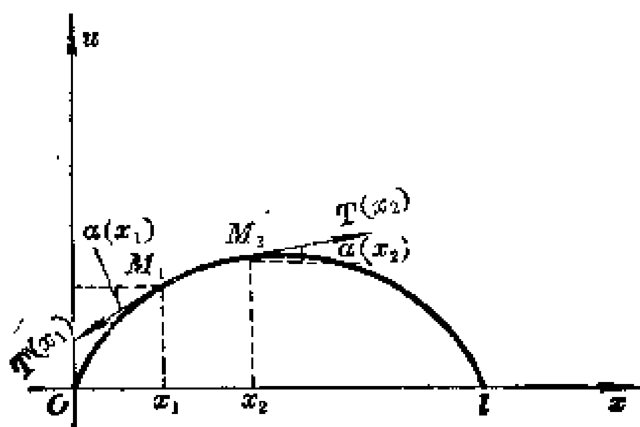


图　1-1

分量为

$$p(\bar{x}, t)(x_2 - x_1) \qquad x_1 < \bar{x} < x_2 \tag{1.1.2}$$

最后，我们设 $\rho(x)$ 是弦的线性密度，因而，在弦的弧段 $\widehat{M_1M_2}$ 上所受到的惯性力为

$$-\rho(\bar{\bar{x}})\frac{\partial^2 u(\bar{\bar{x}}, t)}{\partial t^2}(x_2 - x_1), \qquad x_1 < \bar{\bar{x}} < x_2 \tag{1.1.3}$$

如果忽略掉介质的阻力不计，于是按达朗倍尔原理，得出

$$\left[T_0\frac{\partial^2 u(x_1 + \theta(x_2 - x_1), t)}{\partial x^2} + p(\bar{x}, t) - \rho(\bar{\bar{x}})\frac{\partial^2 u(\bar{\bar{x}}, t)}{\partial t^2}\right](x_2 - x_1) = 0 \tag{1.1.4}$$

先约去因子 $(x_2 - x_1)$，再令 $x_2 \to x_1$ 时，就有 $\bar{x} \to x_1$，$\bar{\bar{x}} \to x_1$，又由于 x_1 的任意性，得出在任意时间 t，对于弦上任意的横坐标为 x 的点处，应有

$$\rho(x)\cdot\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0\cdot\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p(x, t) \tag{1.1.5}$$

(1.1.5)便是有外力作用下弦的横振动方程，我们称它为**弦的强迫横振动方程，或一维非齐次波动方程**.

如果弦是均匀的，就是说 $\rho =$ 常数，那末方程(1.1.5)便可以表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{1.1.6}$$

其中，$a = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$，$f(x, t) = \dfrac{p(x, t)}{\rho}$.

我们很容易看到，如果没有外力的作用，那末方程(1.1.6)还可以表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1.7}$$

上述(1.1.6)是有外力作用下的均匀弦的横振动方程，我们称

它为**均匀弦的强迫横振动方程**，或**一维非齐次波动方程**，(1.1.7)是没有外力作用的均匀弦的横振动方程，我们称它为**均匀弦的自由横振动方程**，或称为**一维齐次波动方程**.

2* 均匀薄膜的横振动方程

设有一块绷紧的弹性薄片，它的厚度很小，以致它对弯曲变形不会产生任何抵抗力，称这样的弹性薄片为**薄膜**. 在平衡状态时位于 xOy 平面内，与某一区域 D 重合，而 D 的边界是一条封闭曲线 L，如图 1-2. 设薄膜受到边界上张力 T 的作用，此时，沿薄膜内部任意方向割出一条曲线 Γ，那末在被割线 Γ 分离出的两个部分之间相互作用力 ΔF 是和弧元素的长度 Δs 成正比例，同时还垂直于弧元素 Δs，所以在曲线 Γ 上的弧元素 Δs 上的作用力 ΔF 就等于 $T\Delta s$.

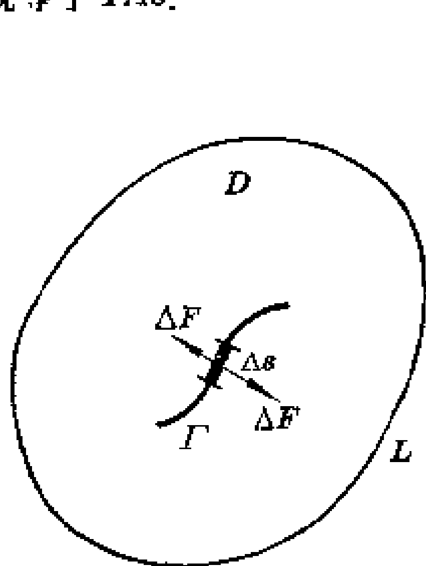


图 1-2

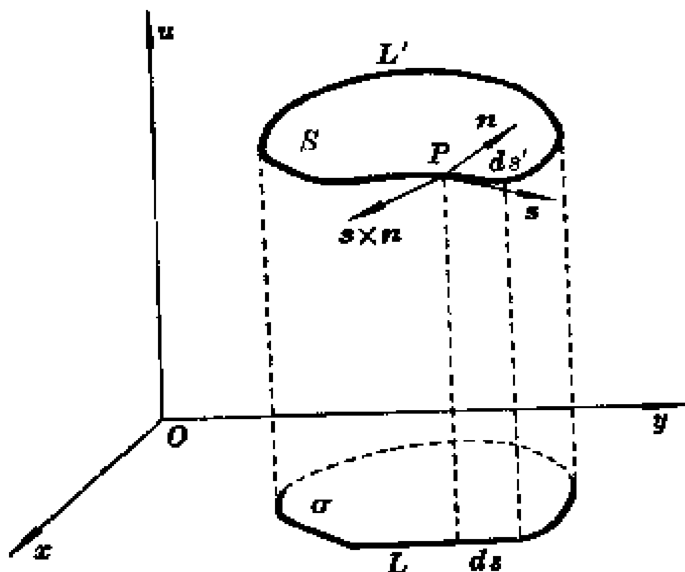


图 1-3

现在研究薄膜的横振动. 设薄膜上每点的运动方向是平行于 u 轴，也就是垂直于 xOy 平面的，如图 1-3. 因而薄膜上每点 (x, y) 的偏位移是 x，y 与 t 的函数，即 $u(x, y, t)$. 以下我们来推导薄膜的横振动方程.

首先取出一块薄膜，在静止状态时，它位于 xOy 平面内 σ 区域上，边界曲线为 L. 当这块薄膜失去平衡位置之后，就变成为曲面 S，边界为空间曲线 L'. 显然，此时应有

$$\sigma = S\cos\gamma$$

其中 γ 是 u 轴与曲面 S 的法线之间的交角.

设所研究的薄膜做微小振动，因而，一次导数$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial y}$ 的平方项可以忽略不计，由公式

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}\approx 1$$

得出，对任何瞬时 t 有 $S\approx\sigma$。换句话说，任意取出的薄膜块，在允许的精确度内，面积的变化可以忽略不计。所以当薄膜做微小振动时，我们仍然可以认为薄膜块 S 是受到最初张力 T 的作用。

现在分别计算出作用于这块薄膜 S 上的张力、外力和惯性力在 u 轴方向的分量，同时把介质的阻力忽略不计。第一，先计算出所研究的那块薄膜 S 的边界上所分布的张力的合力沿 u 轴方向的分量。设 ds' 表示边界 L' 上的弧元素，由于薄膜没有弯曲阻抗，所以张力向量 T 位于薄膜块 S 的切平面上，且垂直于弧元素 ds'。设边界 L' 上点 P 处膜的单位法线向量为

$$\boldsymbol{n}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$$

而边界 L' 的单位切线向量为

$$\boldsymbol{s}=\cos\alpha'\boldsymbol{i}+\cos\beta'\boldsymbol{j}+\cos\gamma'\boldsymbol{k}$$

于是在 P 点处张力的方向为

$$\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=(\cos\beta'\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma')\boldsymbol{i}+(\cos\gamma'\cos\alpha-\cos\gamma\cos\alpha')\boldsymbol{j}$$
$$+(\cos\alpha'\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta')\boldsymbol{k}$$

因此，作用于边界 L' 的弧长元素 ds' 上的张力在 u 轴方向上的分量等于

$$T(\cos\alpha'\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta')ds'$$

由此沿着边界 L' 上分布的所有均匀张力的合力在 u 轴方向上的分量等于

$$T\cdot\oint_{L'}(\cos\alpha'\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta')ds'=T\oint_{L'}\cos\beta dx'-\cos\alpha dy'$$

其中 $\cos\alpha' ds'=dx'$，$\cos\beta' ds'=dy'$。又因为

$$\cos\alpha=\frac{-\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}\approx-\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\cos\beta=\frac{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}\approx-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}\approx 1$$

所以得出

$$T\cdot\oint_{L'}(\cos\alpha'\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta')ds'\approx -T\cdot\oint_{L'}\frac{\partial u}{\partial y}dx'-\frac{\partial u}{\partial x}dy'$$

因为我们假设薄膜做微小振动. 所以 $ds\approx ds'$, 当我们取 L 上的积分代替 L' 上的积分, 并应用格林 Green 公式之后, 得出沿边界 L' 上所分布的张力的合力在 u 轴方向上的分量等于

$$T\cdot\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy \tag{1.1.8}$$

第二, 假设有平行于 u 轴的外力作用于薄膜上, 每单位面积的力为 $p(x,y,t)$, 于是它们作用在所研究的那块薄膜上的合力为

$$\iint_{\sigma}p(x,y,t)\,dxdy \tag{1.1.9}$$

第三, 设 $\rho(x,y)$ 是薄膜的面密度, 那末惯性力的合力为

$$-\iint_{\sigma}\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dxdy \tag{1.1.10}$$

于是根据动力学中的达朗倍尔原理, 在任何时间 t, 作用在所研究的那块薄膜 S 上的张力(1.1.8)、外力(1.1.9)与惯性力(1.1.10)之和等于零, 我们便得出等式

$$\iint_{\sigma}\left[\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-p(x,y,t)\right]dxdy=0$$

因为薄膜块 S 是任意选择的, 故得出上述积分式中的被积函数式在薄膜上任意点, 以及任意时间都等于零, 即有等式

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+p(x,y,t) \tag{1.1.11}$$

(1.1.11)就是有外力作用下薄膜的横振动方程, 我们称它为**薄膜的强迫横振动方程**, 或称为**二维非齐次波动方程**.

如果薄膜是均匀的, 就是说 $\rho=$常数, 那末薄膜的强迫横振动方程可以表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \tag{1.1.12}$$

其中 $a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, $f(x,y,t)=\frac{p(x,y,t)}{\rho}$. 这就是**均匀薄膜的强迫横振动方程**，**或二维非齐次波动方程**. 如果没有外力的作用，就是说 $p(x,y,t)\equiv 0$, 那末由方程(1.1.12)便可得出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.1.13}$$

我们称它为**均匀薄膜的自由横振动方程**，或**二维齐次波动方程**.

类似地，当我们考虑三维空间中的物体振动，或电磁波的传播时，可以得出与(1.1.12)、(1.1.13)相似的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \tag{1.1.14}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.1.15}$$

前者称为**三维非齐次波动方程**，后者称为**三维齐次波动方程**. a 为常数.

3 热传导方程

设有一个各向同性的热传导介质，于某一时间 t 在点 (x,y,z) 处的温度用 $u(x,y,z,t)$ 表示. 设介质中不同处温度是不相同的，那末在介质中将产生由高温处流向低温处的热流. 此时我们在介质内部任意取出一片曲面 ΔS，设点 $M(x,y,z)$ 在 ΔS 上（如图1-4），按热力学中付里叶(Fourier)定律，在时间 Δt 流过面元素 ΔS 的热量 ΔQ 是正比于 $\Delta t\Delta S$ 和温度的法线方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$，即

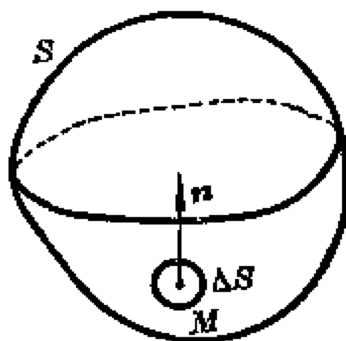


图 1-4

$$\Delta Q=-k(x,y,z,t)\Delta t\Delta S\frac{\partial u}{\partial n} \tag{1.1.16}$$

其中 $k(x,y,z,t)>0$ 是热传导系数，而 n 是曲面元素 ΔS 的法线单位向量，它指向热流的方向，负号表明温度的梯度方向和热流方

向总是相反的．此外，假设介质的热传导率是各向同性的，就是说，函数 $k(x, y, z, t)$ 是不依赖于在点 (x, y, z) 处曲面 S 的法线方向．

我们再用 q_n 表示单位时间内流过单位面积的热流，根据(1.1.16)得出

$$q_n = -k(x, y, z, t)\frac{\partial u}{\partial n} = -k(x, y, z, t)\mathrm{grad}u \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \tag{1.1.17}$$

其中 $\boldsymbol{q} = -k(x, y, z, t)\mathrm{grad}u$ 称为**热流密度向量**．

为了推导出热流的传导规律，设在介质内部任意取出一块区域 V，其边界面 S 为光滑的封闭曲面，我们研究在时间 (t_1, t_2) 内区域 V 内热量的变化．很容易看出，根据公式(1.1.16)，在时间 (t_1, t_2) 内流入曲面 S 的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint\!\!\oint_S k(x, y, z, t)\frac{\partial u}{\partial n}dS \tag{1.1.18}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法线单位向量．

另外，对于我们所取出的微小体积元素 ΔV，在时间 Δt 内温度变化 Δu 必须要消耗 ΔV 内的热量，根据物理中实验规律，应为

$$\Delta Q_2 = [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]c(x, y, z)\rho(x, y, z)\Delta V$$

其中 $\rho(x, y, z)$ 是介质体密度，$c(x, y, z)$ 是介质的比热．于是体积 V 上温度变化 $\Delta u = u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)$ 所必须消耗的热量为

$$Q_2 = \iiint_V [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]c\rho dV$$

因为

$$u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

所以

$$Q_2=\int_{t_1}^{t_2} dt\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV \tag{1.1.19}$$

此外，假设介质内部有热源存在，用 $F(x,y,z,t)$ 表示热源密度，就是说，$F(x, y, z, t)$ 是介质内部单位时间单位体积内所生出的热量，于是在时间 (t_1, t_2) 内体积 V 内部所生出的热量为

$$Q_3=\int_{t_1}^{t_2} dt\iiint_V F(x,y,z,t)dV \tag{1.1.20}$$

因此，对所提出的区域 V，根据热量守恒定律得出等式

$$Q_2=Q_1+Q_3$$

即

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV=\int_{t_1}^{t_2} dt\oiint_S k\frac{\partial u}{\partial n}ds+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2} dt\iiint_V F(x,y,z,t)dV \tag{1.1.21}$$

应用奥氏(Остроградский)公式于上述曲面积分上，得出

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\iiint_V\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}u)-F(x,y,z,t)\right]dV=0$$

假如上述积分号下的被积函数式是连续的，由于体积 V 和时间 (t_1, t_2) 是任意的，就得出于任意时间 t 在所研究的介质内部的任意点 (x, y, z) 应有等式

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}u)+F(x,y,z,t) \tag{1.1.22}$$

方程(1.1.22)称为**各向同性介质有热源的热传导方程** 或称为**三维非齐次热传导方程.**

如果介质是均匀的，就是说，c、ρ 与 k 都是常数，那末方程(1.1.22)可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \tag{1.1.23}$$

其中 $a^2=\frac{k}{c\rho}$, $f(x,y,z,t)=\frac{F(x,y,z,t)}{c\rho}$.

进一步，如果介质内部没有热源，就是说，$F(x,y,z,t)\equiv 0$，就得出

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.1.24}$$

方程(1.1.24)称为**各向同性介质无热源的热传导方程**，或称为**三维齐次热传导方程**.

特别是，当所研究的温度仅仅是坐标 x,y 与时间 t 的函数，与坐标 z 无关，例如在一个非常细薄而均匀的薄片上的热传导就是这样，那末方程(1.1.23)可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \tag{1.1.25}$$

最后，当介质是直线型的，例如均匀细杆，那末热传导方程(1.1.23)可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{1.1.26}$$

(1.1.25)称为**二维非齐次热传导方程**，(1.1.26)称为**一维非齐次热传导方程**. 类似地，当介质内部无热源时，就得出

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.1.27}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1.28}$$

前者称为**二维齐次热传导方程**，后者称为**一维齐次热传导方程**.

4 拉普拉斯(Laplace)方程与泊松(Poisson)方程

第三段中，我们研究了各向同性介质内部的热传导现象，用温度 $u(x,y,z,t)$ 表示某一时间 t 介质内部点 (x,y,z) 处的物理状态．换句话说，这样的介质内部各点热流密度向量 q 形成一个非

稳定的热流向量场，由于 $q=-k\text{grad}u$，可知这个向量场同时又是**势量场**，温度 $u(x,y,z,t)$ 是**势函数**．另外，我们也看到，在这种非稳定的热流势量场中，表示介质内部各点热流规律的温度函数 $u(x,y,z,t)$ 应满足(1.1.22)，

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\text{div}(k\text{grad}u)+F(x,y,z,t)$$

其中 c、ρ、k 与 F 都与第三段相同．当介质是均匀的，则得出(1.1.23)，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

其中 a、f 与第三段相同．

现在假设介质内部是稳定的热流场，就是说，场中热流密度向量 q 不随时间 t 只随点 (x,y,z) 的位置起变化，于是表示热流规律的温度函数 u 仅是点 (x,y,z) 的函数，与时间 t 无关．因此，方程(1.1.23)可表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=g(x,y,z) \tag{1.1.29}$$

其中 $g(x,y,z)=-\frac{1}{a^2}f(x,y,z)$．如果再假设介质内部无热源存在，由于 $g(x,y,z)\equiv 0$，(1.1.23)可表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1.1.30}$$

另外，在向量分析和场论中已经研究过静电场中的电位函数 u 是满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1.1.31}$$

其中 ρ 为场的电荷密度，ε 为介电常数，它与(1.1.29)是相似的。如果在静电场中所研究的区域内 $\rho=0$，那末 u 就满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1.1.32)$$

它与(1.1.30)是相同的.

特别是，当所研究的 u 仅是 x, y 的函数，与 z 无关时，那末方程(1.1.29)与(1.1.30)可表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g(x, y) \qquad (1.1.33)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1.1.34)$$

总之，方程(1.1.29)、(1.1.31)既可描述稳定热流场中热源存在时，场内温度 u 变化规律，又可描述静电场中有电荷分布时，场内电位变化规律，此外，还有其它场的变化规律同样也适合这个方程，我们称(1.1.29)、(1.1.31)为**泊松方程**．同样地，(1.1.30)、(1.1.32)既可描述热流场中没有热源存在时，场内温度 u 变化规律，又可描述静电场中没有电荷分布时，场内电位变化规律，此外，还有其它场的变化规律同样也适合这个方程，我们称(1.1.30)、(1.1.32)为**拉普拉斯方程**.

显然可以看出，方程(1.1.6)，(1.1.12)与(1.1.14)是代表同一类型的，它们都描述介质的振动现象，所以称它们为**振动方程**，或称为**波动方程**．方程(1.1.23)，(1.1.25)与(1.1.26)都是描述介质内部热传导现象的，所以称它们为**热传导方程**．方程(1.1.29)，(1.1.31)，(1.1.33)与(1.1.30)，(1.1.32)，(1.1.34)都是描述稳定热流场中热传导现象的，或静电场中电位分布状况的，它们是属于同一类型的，我们把(1.1.29)，(1.1.31)，(1.1.33)称为**泊松方程**，(1.1.30)，(1.1.32)，(1.1.34)称为**拉普拉斯方程**.

§1-2 定 解 条 件

我们要完全确定某一物理过程发展的规律性，除了已得到的

各种偏微分方程之外，还必须考虑到其它因素，如物理过程的初始状态和介质表面的边界状况的影响.

1 泛定方程

从§1-1中已建立的偏微分方程（1.1.6），（1.1.12），（1.1.14）与(1.1.23)(1.1.25)，(1.1.26)和(1.1.29)—(1.1.32)中可以看出，它们代表了三种本质不同类型的方程.它们是介质本身特有的物理规律的数学表达形式，这些偏微分方程称为**泛定方程**. 同时，在得出那些泛定方程的过程中，除了对发生物理规律的介质作了某些限制之外，还对这些规律的物理量作了某种近似的理想化的要求. 因此，这些方程只能近似地描述物理规律发生的过程，即使是这样的"近似程度"，帮助我们认识客观自然现象的发展规律时，仍然有一定的指导意义.

但是，要完全确定某一物理过程发展的规律性，除了上述得出的数学表达式——各种偏微分方程之外，还必须知道介质的初始状况和介质表面的边界状况. 描述这种初始状况和边界状况的数学条件分别称为**初始条件**和**边界条件**，有时亦把初始条件和边界条件统称为**定解条件**. 关于§1-1中所建立起来的方程，由于它们本质上互不相同的特性，因而对它们中的每一类型所能够提出的定解条件亦完全不同. 为此，我们分别建立各类方程的定解条件.

2 定解条件的形式和定解问题

热传导方程的定解条件和定解问题 从§1-1第三段中可以看出要完全确定出介质内部的热流状态，除了方程(1.1.22)(或(1.1.23))外，还需要给出介质内部的初始状况和介质表面的边界状况. 因此，热传导方程的定解条件应包括初始条件和边界条件. 从

物理过程来分析，热传导方程的初始条件应为

$$u|_{t=0}=\varphi(M) \tag{1.2.1}$$

其中 φ 为已知函数，表示介质在初始时间 $t=0$ 时的各点温度分布状况。

现在我们研究介质表面的边界条件．从物理现象发生的过程中可以看出，介质表面温度是已知，或是通过表面的单位面积元素上的热流量是已知，或是介质表面与周围空间介质之间的热量交换规律是已知．这三种边界状况可用下述三种方法描述．

(1) 若在曲面 S 上每点给出了温度，则边界条件为

$$u|_{S=0}=\psi(p,t) \tag{1.2.2}$$

其中 ψ 是曲面 S 上点 P 与时间 t 的已知函数．这种边界条件称为**第一类边界条件**．

(2) 若在曲面 S 上每点给出的热流量为

$$q_n=-k\frac{\partial u}{\partial n}$$

那末边界条件可表示为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\psi(p,t) \tag{1.2.3}$$

其中 $\psi(p,\ t)=-\frac{q_n}{k}$ 是用已给出的热流量表示的已知函数．这种边界条件称为**第二类边界条件**．

(3) 若介质表面与周围空间介质之间有热量交换，设周围空间介质的温度为 u_0，这时热交换规律应遵循热传导实验定律，即牛顿冷却定律：单位时间从介质表面的单位面积传递给周围空间介质的热量是正比于介质表面和周围空间介质之间的温度差值．即

$$q_n=\alpha(u-u_0)$$

其中 α 是热量交换系数．在此假设 α 是不变的，不依赖于温度的差值，并且对整个介质表面都是相同的．

按照能量守恒定律，这热流量应等于单位时间内流过单位表面面积上的热流量．于是引出下述边界条件

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}=\alpha(u-u_0), \qquad 在 S 上$$

其中 n 是指向曲面 S 的外法线方向．设 $h=\frac{\alpha}{k}$, $hu_0=\psi(p,t)$，得出

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right]\Big|_S=\psi(p,t) \tag{1.2.4}$$

这种边界条件称为**第三类边界条件**.

因此，热传导方程的定解问题就是：在初始条件(1.2.1)及边界条件(1.2.2)—(1.2.4)中的任一个之下，寻求满足热传导方程(1.1.22)—(1.1.28)中任一个的解 u．我们把这种具有初始条件和边界条件的热传导方程的定解问题称为**混合问题**.

有时，如果导体形状比较复杂，这时所提出的问题就比较难于研究．可是，当导体体积很大，所要知道的只是在较短时间内较小范围上的温度变化状况，那末边界条件所发生的影响可以忽略不计．这时就把所研究的导体视为充满整个空间，定解问题变成为：在初始条件(1.2.1)之下，寻求满足热传导方程(1.1.22)—(1.1.28)中任一个的 u．我们将这种仅仅有初始条件没有边界条件的热传导方程的定解问题称为**初始值问题**，或称为**柯西(Cauchy)问题**.

波动方程的定解条件和定解问题　我们以弦振动为例加以说明．从§1-1第一段中可以看出要完全确定弦的振动状况，除了方程(1.1.5)[或(1.1.6)]，(1.1.7)外，还需要有初始条件和边界条件．显然，在初始时间譬如 $t=0$ 弦上每一点具有一定的位置和速度，就是说，初始条件为

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x) \tag{1.2.5}$$

对于弦振动的边界条件通常分为三种情况.

(1) 弦的边界固定,此时边界条件为

$$u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0$$

一般情况下,边界条件可写为

$$u|_{x=0}=\mu_1(t),\quad u|_{x=l}=\mu_2(t) \tag{1.2.6}$$

其中 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$均为时间 t 的已知函数. 这种边界条件称为第一类边界条件.

(2) 弦的边界在一个光滑的柱上自由滑动,不受力的作用,称此为"自由边界". 此时边界条件可写为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=l}=0$$

此处 n 为端截面的外法线方向. 一般情况下,边界条件可写为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=0}=\mu_1(t),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=l}=\mu_2(t) \tag{1.2.7}$$

其中 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$均为时间 t 的已知函数. 这种边界条件称为第二类边界条件.

(3) 弦的边界固定在弹性支承上, 当弦振动时给支承以垂直方向的力,支承因此也会产生微小的运动,称此为"弹性支承"边界条件. 这时边界条件可写为

$$\left.\left[\frac{\partial u}{\partial n}-hu\right]\right|_{x=0}=0,\quad \left.\left[\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right]\right|_{x=l}=0$$

其中 h 为已知正常数,n 是端截面的外法线方向. 一般情况下,边界条件可写为

$$\left.\left[\frac{\partial u}{\partial n}-hu\right]\right|_{x=0}=\mu_1(t),\quad \left.\left[\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right]\right|_{x=l}=\mu_2(t) \tag{1.2.8}$$

其中 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$均为时间 t 的已知函数, 这种边界条件称为第三类边界条件.

因此,弦振动的定解问题就是: 在初始条件(1.2.5)与边界条

件(1.2.6)—(1.2.8)中的任一个之下，寻求弦振动方程 (1.1.5) [或 (1.1.6)]，(1.1.7)的解 u. 我们把既有初始条件又有边界条件的弦振动方程的定解问题称为**混合问题**.

有时，弦本身很长，所需要研究的是在较短时间内较小范围上的弦振动状况，那末边界条件发生的影响往往可以忽略不计. 因此，这时就可以把所研究的弦视为充满整个直线，定解问题就变成为：在初始条件 (1.2.5) 下寻求满足弦振动方程 (1.1.5) [或 (1.1.6)]，(1.1.7)的解 u. 我们把只有初始条件没有边界条件的弦振动方程的定解问题称为**初始值问题**，或称为**柯西问题**.

类似地，对二维的薄膜振动方程(1.1.11)—(1.1.13)，三维的物体振动或电磁波传播的方程(1.1.14)、(1.1.15)，同样也有混合问题和初始值问题. 此处不详细叙述，读者可以自己写出.

拉普拉斯方程和泊松方程的定解条件和定解问题 从§1-1第四段可以看出，拉普拉斯方程与泊松方程都是描述稳定的热流场中热流量变化规律的. 此时，温度 u 不随时间 t 变化，方程的定解条件当然不会再有初始条件而只有边界条件. 我们把这种只是给定边界条件而不再要给定初始条件的拉普拉斯方程或泊松方程的定解问题称为**边值问题**.

和热传导方程情况一样，拉普拉斯方程或泊松方程仍然有三类边界条件.

(1) 边界条件为

$$u|_S=\psi(p) \tag{1.2.9}$$

其中 $\psi(p)$为边界面 S 上的已知函数. 我们把在边界条件(1.2.9)下，寻求满足方程(1.1.29)，(1.1.30)中任一个的解 u 的定解问题称为**狄利克莱(Dirichlet)问题**，或称为**第一边值问题**.

(2) 边界条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\psi(p) \tag{1.2.10}$$

其中 $\psi(p)$为边界面 S 上的已知函数，n 为 S 的外法线方向单位向量．我们把在边界条件(1.2.10)下，寻求满足方程(1.1.29)，(1.1.30)中任一个的解 u 的定解问题称为**牛曼(Neumann)问题**，或称为**第二边值问题**．

(3) 边界条件为

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right]\bigg|_S=\psi(p) \tag{1.2.11}$$

其中 $\psi(p)$ 为边界面 S 上的已知函数，n 为 S 的外法线方向单位向量，h 为常数．我们把在边界条件(1.2.11)下，寻求满足方程(1.1.29)，(1.1.30)中任一个的解 u 的定解问题称为**混杂问题**或**劳平(Robin)问题**，也称为**第三边值问题**．

类似地，对二维的泊松方程(1.1.33)与拉普拉斯方程(1.1.34)，同样也有上述三类边界条件与边值问题．此处不详细叙述，读者可以自己写出．

§1-3　定解问题的适定性介绍

前面，我们把一些自然现象以及工程技术中发生的物理过程规律性的探讨，转变为数学中一些偏微分方程的定解问题．要能够正确的认识运用这种物理过程发展的规律性，对于偏微分方程定解问题的进一步讨论是十分必要的．在数学物理方程里，对于这些问题的研究，一方面是寻找定解问题的解法，得出解的表达式与计算方法，另一方面就是对提出的定解问题本身进行探讨．通常讨论如下三个问题：第一，定解问题的解是否存在？第二，定解问题的解是否唯一？第三，定解问题的解是否连续依赖于定解条件？或者说，当定解条件发生很微小的变化时，解是否也随着发生很微小的变化？在数学物理方程里，对于一些经典性的定解问题，例如本章所引出的波动方程，热传导方程，拉普拉斯方程与泊松方程，

或者是这些方程的更一般形式的定解问题，都已证明了解是存在的，唯一的，连续依赖于定解条件的．一个定解问题，如果解是存在的，唯一的，连续依赖于定解条件的，就称这样的定解问题是适定的，否则，就称定解问题是不适定的．根据这样的适定性概念，可以认为我们今后涉及的定解问题都是适定的，所以不去讨论适定性问题，只着重讨论这些经典型定解问题的一些解法（包括数值解法）和解的表达式等．

当偏微分方程的定解问题提出之后，求解方法上大致的途径：第一，采用类似于常微分方程中常用的方法，先求出微分方程的一般解，然后按照定解条件确定所要求的特解．这种求解方法在某些情况会得到成功，例如无界弦的初始值问题等，但一般说来是会遇到很大困难，甚至不会成功．首先，因为在偏微分方程中很难定义“一般解”的概念，其次对许多偏微分方程，即使它们的“一般解”很容易求出，但是要从“一般解”确定特解往往是不可能的．于是人们就转而采用第二种方法．

第二，在实际问题中偏微分方程所要求的不是“一般解”，而是要求出适合某类定解条件的特解，因而在偏微分方程的研究中，方法上主要是针对定解问题去进行讨论．由于偏微分方程定解问题的建立是比较密切联系实际的，因而在定解问题的研究过程中，从实际问题的启发获得了一些求解的方法，例如分离变量法就是受物理学中驻波概念的启发形成的一种解法．

结合本门课程的要求，我们选择了对各类方程都很有适用价值的分离变量法作为重点内容讨论，简单扼要地叙述了积分变换法、达朗倍尔法和格林函数法．通过这些方法所得到的解都是分析表达式．为给使用计算机解决各种实际问题奠定基础，作为偏微分方程数值解法入门，我们写入了有限差分法，有限元法．举出几个数值计算的例子，详细写出解算步骤，划出框图，这样做以期

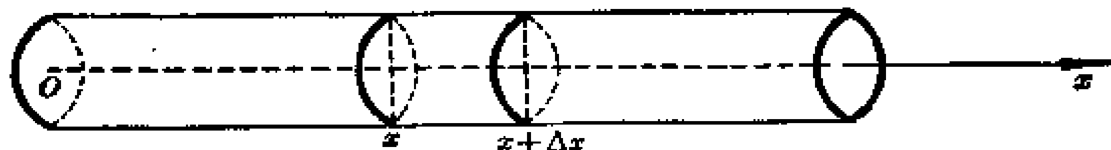
本书的不同读者能从中选阅自己所需要的部分，也是编写本书的重要宗旨之一。

第一章 习 题

1 细杆(或弹簧)受某种外界原因而产生纵向振动，以 $u(x,\ t)$ 表示静止时横坐标 x 处的点在时间 t 离开原来位置的偏位移。假设振动过程中所发生的张力服从虎克定律，试证明 $u(x,\ t)$ 满足方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x)\ \frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

其中 ρ 为杆密度，E 为弹性模量。设杆横截面大小处处相同。

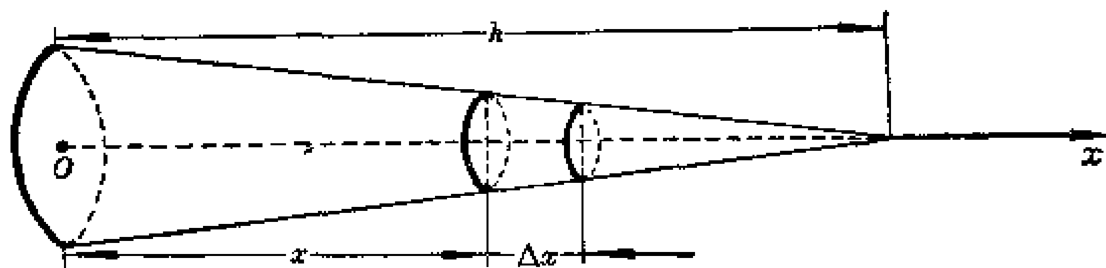


第 1 题图

2 证明圆锥形枢轴的纵向振动方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial t}\right]$$

其中 h 为圆锥的高，ρ 为锥形轴的密度，E 为弹性模量。



第 2 题图

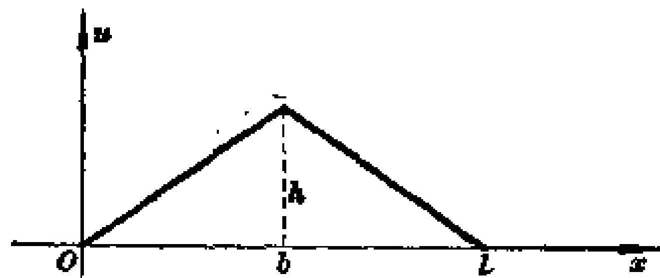
3 一均匀细杆直径为 l，假设它在同一横截面上温度是相同的，杆的表面和周围介质发生热交换，服从规律 $Q=k_1(u-u_1)dsdt$。假设杆的密度为 ρ，比热为 c，热传导系数为 k。试证明此时温度 u 满足方程

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{4k_1}{l}(u-u_1)$$

4 试列出下列情况下弦振动的定解条件：设弦的两端固定，拉得很紧，

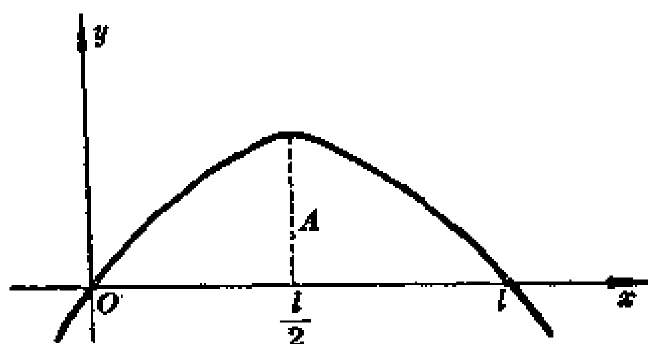
最初时刻没有位置移动，但有初始速度为$V_0\sin\frac{\pi x}{l}$，其中 l 是弦长，V_0 是常数。

5　设一弦两端固定，初始位移如图所示，初始速度为常数 V_0。试列出相应的定解条件。



第 5 题图

6　一条长为 l 的振动弦两端始终固定，除张力外还受一种周期性外力 $F=A\cos\omega t$ 的作用，在开始时呈抛物线形状，如图所示，初始速度为 $V_0\sin\frac{\pi x}{l}$。试确定弦振动的定解问题。其中 A、ω、V_0 均为常数。



第 6 题图

7　一根长为 l 的均匀细棒，侧面绝热，初始温度为零，端点 $x=l$ 永远保持零度，而端点 $x=0$ 处温度随时间线性增加。试列出此时的定解条件。

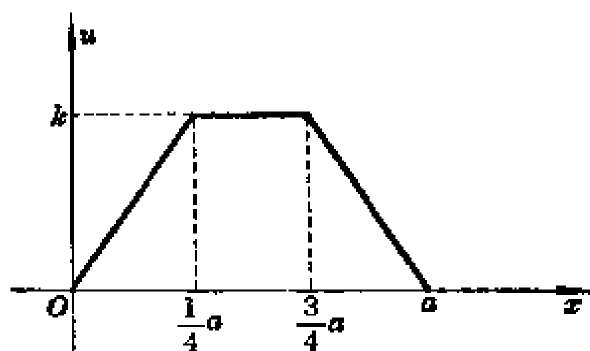
8　一根半无限长的细棒，侧面绝热，它的热传导系数为 k(常数)，初始温度为零，在端点 $x=0$ 处每单位时间输入热量为 Q_0(常数)。试列出温度函数满足的热传导方程和定解条件。

9　一根长为 l 的细杆，其两端保持绝热状态，初始温度分布为已知函数 $\varphi(x)$。试列出热传导方程的定解条件。

10　考虑热沿一细长杆流动(一维的)。如果杆的热量因放射衰变而有损失，设所损失的热量密度正比于 $e^{-\alpha x}$，$\alpha>0$ 常数。试导出温度 $u(x,t)$ 所满足的偏微分方程。

11　一边长为 a 的正方形薄膜，将它固定于弹性支承上，假设它的初始位移 $u|_{t=0}=xy(x-a)(y-a)$，而没有初始速度．试列出薄膜横振动的定解条件．

12　一矩形薄板，边长为 a 及 b，表面绝热，温度稳恒分布沿 x 轴一边的温度分布如图所示，其它三边保持零度．试列出此时的定解问题．



第 12 题图

13　一均匀圆盘，其整个表面都是绝热的，设在 $t=0$ 时，其温度只是半径 r 的一个已知函数，此处 r 为离圆盘中心的距离．试证明圆盘上的温度分布 $u(r,t)$ 满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

14　验证下列方程有指出的解：

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\quad u(x,y)=f(x)+g(y)$

(2) $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y},\quad u(x,y)=f(x)g(y)$

(3) $a\dfrac{\partial u}{\partial x}+b\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\quad u(x,y)=f(ay-bx)$

(4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$

(5) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}-6\dfrac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}+11\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x}-6\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0,$

$$u(x,y)=f(x+y)+g(2x+y)+h(3x+y)$$

其中：f、g、h 均为已知的可微分函数．

15　证明如果 $u_1(x,y)$ 与 $u_2(x,y)$ 都是方程

$$p_1(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p_2(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+p_3(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+q_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+q_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+r_1(x, y)u=0$$

的解，那末对于任意常数 c_1 与 c_2，$c_1u_1(x, y)+c_2u_2(x, y)$ 也是方程的解(这个性质称为线性齐次方程的叠加原理)．其中 p_1、p_2、p_3、q_1、q_2、r_1 均为已知的函数．

16 应用柱面坐标 r, θ, z 把拉普拉斯算式

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

转换成为

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

其中 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

17 试证明 Δu 转换为球面坐标后的形式为

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

其中 $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

附　录

§1-4* 传输线方程

设平行二导线传输线是分布参数电路，即传输线上电阻 R，电感 L，电容 C 与电导 G 是按单位长度计算电值的，传输线上任一微分元素 dx 上的电阻，电感，电容与任何其它长度为 dx 上的相同．由于传输线是交变电源，所以电压与电流将沿着传输线的长度 x 变化，通常还是时间 t 的函数．问题就是要确定分布于传输线中的电压 $v(x, t)$ 与电流 $i(x, t)$．

取如图 1-5 的分布参数电路

设某一瞬间在传输线上距离始端为 x 处电压为 $u(x, t)$，电流为 $i(x, t)$，则在同一瞬间在距离始端为 $x+dx$ 处的电压为 $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$，电流为 $i+\frac{\partial i}{\partial x}dx$.
计算 dx 小段的电压降．对回路应用基尔霍夫(Кирхгоф)第二定律，便得出

$$\left(Ri+L\frac{\partial i}{\partial t}\right)dx+\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)-u=0,$$

化简后得出

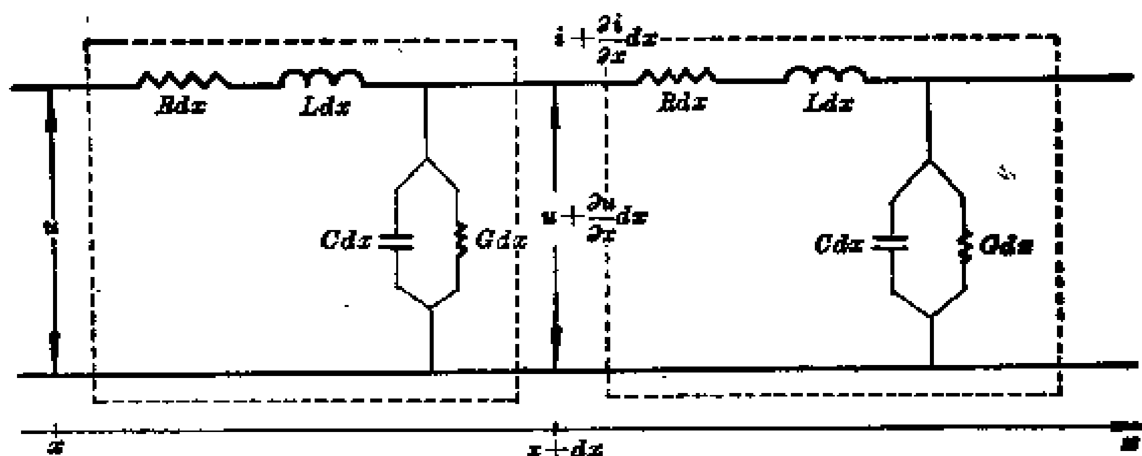


图 1-5

$$\frac{\partial u}{\partial x}+L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri=0 \tag{1.4.1}$$

此处 $Ridx$, $L\frac{\partial i}{\partial x}dx$ 分别表示在$(x+dx)$处电阻，电感所产生的电压.

同样，电流$i(x,t)$由点x至$(x+dx)$时也有变化的，因为有一部分电流将流向分支电导与电容．根据基尔霍夫第一定律流入x节点的电流的总和应等于从该节点流出的电流的总和．在此，流经分支电容，电导的电流分别为$(Cdx)\frac{\partial u}{\partial t}$，$(Gdx)u$，所以

$$i(x,t)=(Cdx)\frac{\partial u}{\partial t}+(Gdx)u+i(x,t)+\frac{\partial i}{\partial x}dx$$

化简后得出

$$\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial t}+Gu=0 \tag{1.4.2}$$

将(1.4.1)对x微分，(1.4.2)对t微分，再利用$\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t}$的表达式后，得出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial u}{\partial t}+GRu \tag{1.4.3}$$

完全类似地可以得出

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial i}{\partial t}+GRi \tag{1.4.4}$$

在高频率情况下，电阻R与电漏G的影响甚小，甚至可以忽略不计，即

$R\approx 0$, $G\approx 0$, 于是得到和§1-1中(1.1.7)同样的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \tag{1.4.5}$$

这里$\frac{1}{LC}$就相当于§1-1中a^2.

第二章 分离变量法

本章所讨论的是古典偏微分方程的常用重要解法，称为分离变量法，又名付里叶级数法．这种解法的基本思想在高等数学中已为大家所熟悉，例如，求解常系数线性齐次常微分方程初始值问题时，先求出方程的足够数目的特解(基础解系)，然后利用叠加原理作这些特解的线性组合，使其满足给定的初始条件．这就启发我们求解偏微分方程的定解问题时，首先试图求出方程的许多特解，例如 $u_n(x, t)$，然后利用它们的线性叠加，即令

$$u(x, t)=\sum_n u_n(x, t),$$

从而定出所要求的解．此处我们要求的

$$u_n(x, t)=X_n(x)\cdot T_n(t)$$

是变量 x 与 t 的分离形式．经过实践以后，证实了这种方法不仅对波动方程的定解问题有效，同时，对其它许多方程的定解问题，例如热传导方程，拉普拉斯方程等的定解问题也是有效的．

§2-1 有界弦的自由振动 物理意义

现在以有界弦的自由振动为例，讨论分离变量法的主要步骤和基本精神．

I 端点固定的自由振动

设有两端点固定的弦的自由振动的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, 0<t & (2.1.1)\\ u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x) & (2.1.2)\\ u(0, t)=0, \quad u(l, t)=0 & (2.1.3)\end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$, $\psi(x)$是已知函数，且不同时为零①.

(2.1.1), (2.1.3)两式的特点是它们都是线性齐次的，这里所谓线性是指它们所含的未知函数项及其导数项均为一次，所谓齐次是指(2.1.1)中没有考虑外力作用，所以自由项 $f(x,t)$ 为零，(2.1.3)中右端均为零. 因此，同时适合(2.1.1)与(2.1.3)的任何两个解之和仍然是解，换言之，(2.1.1)与(2.1.3)的解是适合所谓叠加原理的. 于是，可先求出适合(2.1.1)与(2.1.3)的形如$u(x,t)=X(x)T(t)$的所有特解，然后把它们按适当方式叠加起来，使其适合初始条件(2.1.2)，就得到所要求的特定解. 具体可分如下四个步骤.

第一 求出 $X(x)$与 $T(t)$所满足的常微分方程

设解的形式

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{2.1.4}$$

这里 $X(x)$为变量 x 的函数，$T(t)$为变量 t 的函数，把(2.1.4)代入(2.1.1)中，则得出

$$X(x)\cdot T''(t)=a^2X''(x)T(t)$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

这个式子左边仅是 t 的函数，右边仅是 x 的函数，又变量 x 与 t 是彼此无关的，因此，上式要相等，只有它们恒等于某一常数时才能成立. 设这个常数为$-\lambda$，于是就得出 $T(t)$与 $X(x)$所应适合的两个常微分方程

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 \tag{2.1.5}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{2.1.6}$$

---

① 此处 u_{tt}、u_{xx} 分别表示 u 对 t、x 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，今后偏导数的这两种符号彼此通用. 其余依此类推.

第二　解固有值问题，求出固有值及固有函数

为了要(2.1.4)能适合边界条件 $u(0,\ t)=X(0)\cdot T(t)=0$ 与 $u(l,\ t)=X(l)\cdot T(t)=0$，因为 $T(t)$不能恒为零，所以

$$X(0)=X(l)=0 \tag{2.1.7}$$

于是求解问题(2.1.1)与(2.1.3)就变成为求边值问题

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=X(l)=0 \tag{2.1.8}$$

与常微分方程(2.1.5)了．边值问题(2.1.8)并非对任何 λ 都有非零解，而只能当 λ 取某些特定值时才能有非零解存在．我们就把这样的边值问题(2.1.8)称为**固有值问题**(或**特征值问题**)，把对应有非零解的 λ 称为**固有值**(或**特征值**)，而把与 λ 相对应的非零解 $X(x)$称为**固有函数**(或**特征函数**)．下面讨论(2.1.8)的求解问题：

1° 若 $\lambda=0$，则(2.1.8)中方程的通解为 $X(x)=Cx+D$，这里 C 与 D 是待定常数．为了要适合(2.1.8)中的边界条件，$X(0)=D=0$ 及 $X(l)=Cl+D=0$，从而 $X(x)\equiv 0$．因此，由(2.1.4)得 $u(x,\ t)\equiv 0$，它不可能适合条件(2.1.2)．

2° 若 $\lambda<0$，则(2.1.8)中方程的通解为 $X(x)=C\text{ch}\sqrt{-\lambda}x+D\text{sh}\sqrt{-\lambda}x$，这里 C 与 D 是待定常数．为了要适合(2.1.8)中的边界条件，$X(0)=C\text{ch}0+D\text{sh}0=0$ 及 $X(l)=C\text{ch}\sqrt{-\lambda}l+D\text{sh}\sqrt{-\lambda}l=0$，必须 $C=D=0$，从而 $X(x)\equiv 0$．因此，由(2.1.4)得 $u(x,\ t)\equiv 0$，这时的 $u(x,\ t)$不可能适合条件(2.1.2)．

3° 若 $\lambda>0$，令 $\lambda=\omega^2$，则(2.1.8)中方程的通解为 $X(x)=C\cos\omega x+D\sin\omega x$，这里 C 与 D 为待定常数．为了适合(2.1.8)中的边界条件，$X(0)=C=0$ 及 $X(l)=D\sin\omega l=0$，($D\neq 0$，否则又得到 $X(x)\equiv 0$)，则 $\omega l=n\pi\ (n=1,2,3,\cdots)$，即 $\omega_n=\dfrac{n\pi}{l}\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$．于是就得出(2.1.8)中 $\sqrt{\lambda_n}\ (=\omega_n)$，当取如下值

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l},\quad \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2} \tag{2.1.9}$$

时，$X(x)$才有非零解

$$X_n(x)=D_n\sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,3,\cdots \tag{2.1.10}$$

(2.1.9)中的$\sqrt{\lambda_n}=\omega_n=\frac{n\pi}{l}$就是固有值，(2.1.10)中的$X_n(x)$就是相应于固有值的固有函数.

将(2.1.9)中$\lambda_n=\omega_n^2$代入(2.1.5)中，求出通解为

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l} \tag{2.1.11}$$

于是由(2.1.4)得出

$$u_n(x,t)=X_n(x)\cdot T_n(t)$$
$$=\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.1.12}$$

其中a_n，b_n是任意常数，$n=1,2,3,\cdots$. 这里$u_n(x,t)$是适合(2.1.1)和(2.1.3)的，下面立刻可以看到当它们按照某种方式叠加后，才能适合条件(2.1.2).

第三 $u_n(x,t)$的叠加

上述求出的(2.1.12)是适合方程(2.1.1)和边界条件(2.1.3)的，可是它们未必就能适合初始条件(2.1.2)，即当$t=0$时，$u_n(x,t)$及$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$未必就能等于$\varphi(x)$和$\psi(x)$. 但是按叠加原理，如果级数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.1.13}$$

当$x,t>0$时收敛，设和函数为$u(x,t)$，并且$u(x,t)$对x，t二次逐项可微，那末可以验证$u(x,t)$适合弦振动方程(2.1.1)和边界条

件(2.1.3)．同时，如果恰当地选择系数 a_n, b_n，$u(x,t)$还可以适合初始条件(2.1.2)．

第四　系数 a_n, b_n 的确定

如果(2.1.13)中的函数 $u(x,t)$能适合初始条件(2.1.2)，即

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x)$$
$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x) \tag{2.1.14}$$

则只要利用固有函数系$\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$, $n=1,2,3,\cdots$的正交性，把上述二式都乘以 $\sin\frac{k\pi x}{l}$后，并把 x 从 0 到 l 积分，就得出系数 a_k，b_k 应适合

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$
$$k=1,2,3,\cdots \tag{2.1.15}$$
$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

把这样求出的系数 a_k，b_k 的表达式(2.1.15)代入(2.1.13)后，就可验证所得的(2.1.13)必为定解问题(2.1.1)—(2.1.3)的解了．

总之，经过上述四个步骤后，就可以得出弦振动方程的定解问题(2.1.1)—(2.1.3) 的解 $u(x,t)$ 了．为了保证上述步骤的合理性，只要给出下述条件就足够了：(1)$\varphi(x)$在$[0,l]$上二次连续可微，$\varphi(x)$的三阶导数在$[0,l]$上是分段连续的，$\psi(x)$在$[0,l]$上一次连续可微，$\psi(x)$的二阶导数在$[0,l]$上是分段连续的，(2) $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$，$\psi(0)=\psi(l)=0$．那末，定解问题(2.1.1)—(2.1.3)的解存在，并且这个解可用(2.1.13)式表示，其中 a_k, b_k 由(2.1.15)式给出．

下面验证级数(2.1.13)确实是定解问题(2.1.1)—(2.1.3)的解.

我们注意到这样的事实:形式解(2.1.13)中每一项都满足方程(2.1.1),因此只要证明,当 φ、ψ 满足给定的条件时,级数(2.1.13)可以逐项微分二次就行了.也就是说,如果证明了(2.1.13)微分二次后仍是一致收敛的,那末由它表示的函数 $u(x, t)$ 一定满足方程(2.1.1).此时初始条件和边界条件的满足也是显然的了.为此先建立下面的引理.

引理 设 $f(x)$ 是区间 $[0, l]$ 上的连续函数,它的 m 阶导数连续,$m+1$ 阶导数分段连续,并且

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(l)=0, \left(k=0, 2, 4, \cdots, 2\left[\frac{m}{2}\right]\right)$$

将函数 $f(x)$ 在区间 $[0, l]$ 上展开成付里叶级数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

则由系数 A_k 所构成的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m |A_k|$$

是收敛的.其中 $\left[\frac{m}{2}\right]$ 为 $\frac{m}{2}$ 的最大整数部分.

证明 因为 $f(x)$ 的 $m+1$ 阶导数分段连续,所以 $f^{(m+1)}(x)$ 可以在区间 $[0, l]$ 上展开成付里叶级数.当 m 为奇数时展开式为

$$f^{(m+1)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(m+1)} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

当 m 为偶数时展开式为

$$f^{(m+1)}(x)=\frac{A_0^{(m+1)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(m+1)} \cos\frac{k\pi x}{l}$$

根据巴塞伐尔(Parseval)等式

$$\frac{(A_0^{(m+1)})^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(m+1)})^2=\frac{2}{l}\int_0^l [f^{(m+1)}(x)]^2 dx<\infty$$

现在计算 $A_k^{(m+1)}$.当 m 为奇数时,

$$A_k^{(m+1)}=\frac{2}{l}\int_0^l f^{(m+1)}(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi=\frac{2}{l}\left[f^{(m)}(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\right]_0^l$$

$$-\frac{2}{l}\cdot\frac{k\pi}{l}\int_0^l f^{(m)}(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

$$=-\frac{2}{l}\cdot\frac{k\pi}{l}\left[f^{(m-1)}(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\right]_0^l-\frac{2}{l}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\int_0^l f^{(m-1)}\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

$$=-\frac{2}{l}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\int_0^l f^{(m-1)}(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

这是由于假设 $f^{(m-1)}(x)$ 在 $x=0$ 及 $x=l$ 处为零的缘故. 如此继续下去, 可以得出

$$A_k^{(m+1)}=(-1)^{\frac{m+1}{2}}\cdot\left(\frac{k\pi}{l}\right)^{m+1}\cdot A_k$$

当 m 为偶数时, 同样地可以得到

$$A_k^{(m+1)}=(-1)^{\frac{m}{2}}\cdot\left(\frac{k\pi}{l}\right)^{m+1}\cdot A_k$$

由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}|A_k^{(m+1)}|^2<\infty$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{2m+2}A_k^2<\infty$$

利用柯西不等式, 可以得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^m\cdot|A_k|\leqslant\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{2m+2}\cdot|A_k|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)}<\infty$$

引理证毕.

利用这个引理和 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 的假设条件可知, 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|,\quad\sum_{k=1}^{\infty}k^2|b_k|^2$$

都是收敛的. 因此级数(2.1.13)式关于 x 及 t 逐项微分二次以后的级数是绝对且一致收敛的, 因而这些微分后的级数收敛于相应的导数, 所以满足方程初始条件及边界条件. 证毕.

最后，我们还可以把所得到的解(2.1.13)写成为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi a}{l}(t+\alpha_n)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.1.16}$$

其中

$$A_n=\sqrt{a_n^2-b_n^2},\ \frac{n\pi a}{l}\alpha_n=\operatorname{arc\,tg}\frac{a_n}{b_n}$$

许多问题所给出的初始条件不一定能满足上述条件，这时(2.1.16)就不能是古典意义下的解，称此时的解为**广义解**. 甚至在某种意义下，我们仍然采用上述级数为问题的近似解的极限情况：例如，将 $\varphi(x)$, $\psi(x)$展开为级数，$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{k\pi x}{l}$, $\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin\frac{k\pi x}{l}$, 取 $\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\sin\frac{k\pi x}{l}$, $\psi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\psi_k\sin\frac{k\pi x}{l}$, 当作近似初始函数，把定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\ 0<t\\ u(x,0)=\varphi_n(x), & u_t(x,0)=\psi_n(x)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\end{cases}$$

的解 $u_n(x,t)$当作原问题的近似解. 此时，$u_n(x,t)$的极限情况就是 $u(x,t)$.

例 设(2.1.2)中的 $\varphi(x)=\frac{x(l-x)}{M}$, M是常数，$\psi(x)=0$, 那末由(2.1.15)得出

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{2}{lM}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\\ &=\frac{2}{lM}\left[-\frac{l}{k\pi}x(l-x)\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l\right.\\ &\quad\left.+\frac{l}{k\pi}\int_0^l(l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{k\pi M}\left[\frac{l}{k\pi}(l-2x)\sin\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l+\frac{2l}{k\pi}\int_0^l\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right]$$

$$=-\frac{4l^2}{k^3\pi^3M}\cos\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l=\frac{4l^2}{k^3\pi^3M}(1-\cos k\pi)$$

$$=\frac{4l^2}{k^3\pi^3M}(1-(-1)^k)=\begin{cases}\dfrac{8l^2}{k^3\pi^3M}, & \text{当 } k=2n+1\\ 0, & \text{当 } k=2n+2\end{cases}$$

$$b_k=0,\quad k=1,2,3,\cdots$$

所以由(2.1.13)得出

$$u(x,t)=\frac{8l^2}{\pi^3M}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

(2.1.17)

2 解的物理意义

下面说明解的物理意义．先分析一下（2.1.12）的物理意义，分析的方法是：先固定弦上每点 x，看看该点的振动规律，再固定时间 t，看看该时刻 t 波的形状是什么．前面所得到的（2.1.12）式的 $u_n(x,t)$ 称为**驻波**．在这样的振动中，弦上每一固定点 x 都作形如

$$u_n(x,t)=A_n\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi a}{l}(t+\alpha_n)$$

的**简谐振动**，其振幅为 $A_n\sin\frac{n\pi x}{l}$，振动频率为 $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$，（这频率就是第 n 个固有值 $\sqrt{\lambda_n}$ 乘以 a）．显然，这频率只与弦本身的性质有关，（因为 $a=\sqrt{T/\rho}$），而与引起振动的原因无关，因此称为**固有频率**．$\omega_1=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$，弦所发出的最低音称为**基音**，其余的相应于 ω_1 倍数的频率，弦所发出的音称为**泛音**．

另外，对于任意固定时刻 t，第 n 个驻波的波形应由第 n 个固

有函数 $\sin\frac{n\pi x}{l}$ 来描述，并按照

$$u_n(x,t)=A_n\sin\frac{n\pi a}{l}(t+\alpha_n)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}$$

来确定.

从(2.1.12)我们还可以看出，当 $n\geqslant 2$ 时，在点 $x=\frac{l}{n},\frac{2l}{n},\cdots\frac{(n-1)l}{n}$ 处，因为 $\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=0$，从而 $u_n(x,t)=0$，所以在这些点处，弦在振动过程中永远保持静止不动，我们把弦上这些点称为驻波 $u_n(x,t)$ 的**波节(或节点)**；在点 $x=\frac{1}{2n}l,\frac{3}{2n}l,\cdots\cdots,\frac{2(n-1)+1}{2n}l$ 处，因为 $\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\pm 1$，所以弦在这些点处以最大振幅 A_n 在振动，我们把弦上这些点称为驻波 $u_n(x,t)$ 的**波腹(或腹点)**. 当 $n=1,2,3$ 时，驻波的波形如图 2-1 所示.

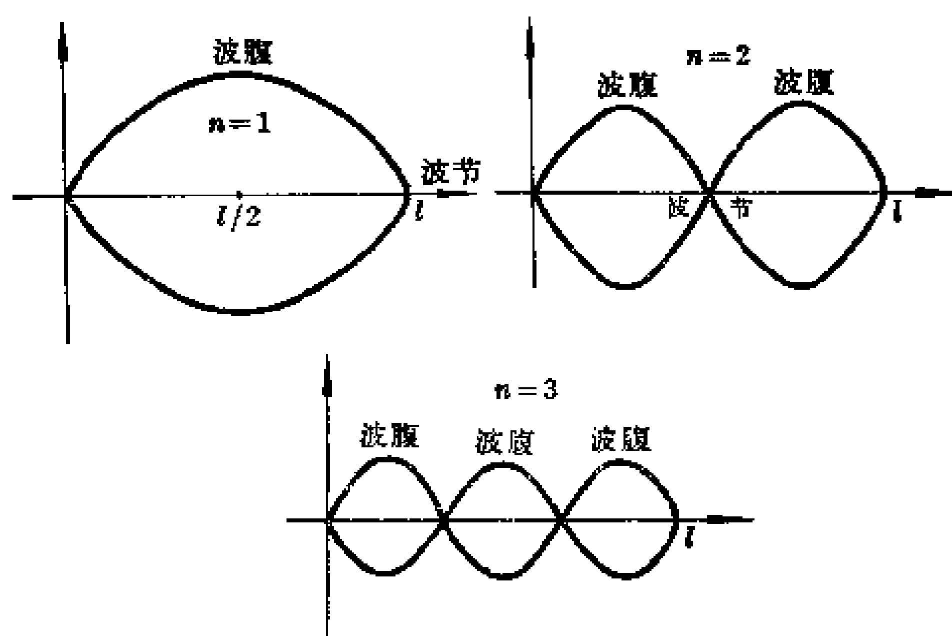


图 2-1

总之，$u_1(x,t)$，$u_2(x,t)$，$\cdots$，$u_n(x,t)$，$\cdots$是一系列的驻波，它们的频率、位相、振幅都各不相同. 从(2.1.13)看出，用分离变量法

得出的解 $u(x,t)$是由无穷多个驻波(2.1.12)叠加而成，而每个驻波的波形及频率都分别由各自的固有函数与固有值所确定。这完全符合实际情况，因为人们在考察弦的振动时，就发现了许多驻波，它们的叠加又构成了各种各样的波形，因此很自然地会想到用驻波的叠加表示弦振动方程的解。这就是分离变量法的物理背景。所以分离变量法有时又称为**驻波法**。

3　试探法

现在我们还希望从其它方面来认识分离变量法。由于所考虑的振动弦的两端点始终是固定的，那末振动弦上各点的位移就是定义在 $0\leqslant x\leqslant l$ 上的函数，并且在区间的端点上均为零。所以我们可以将 $u(x,t)$展开为付里叶级数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.1.18}$$

其中展开系数 $T_n(t)$应是时刻 t 的函数。由于(2.1.18)是代表弦振动状态的，所以它必须适合(2.1.1)，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

由此便得出(2.1.18)中的付里叶系数应适合微分方程

$$T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=0 \tag{2.1.19}$$

它与方程(2.1.5)当 $\lambda=n^2\pi^2a^2/l^2$ 完全相同，故其解为

$$T_n(t)=a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l} \tag{2.1.11}$$

又因为(2.1.18)应适合初始条件(2.1.2)，所以

$$\varphi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\psi(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\dot{T}_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.1.20}$$

于是 $T_n(0)$, $\dot{T}(0)$应分别是 $\varphi(x)$, $\psi(x)$的付里叶系数，即

$$\left.\begin{aligned}T_n(0)&=\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\\ \dot{T}_n(0)&=\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\end{aligned}\right\} \tag{2.1.21}$$

以(2.1.21)即可定出(2.1.11)中的常数 $a_n=\varphi_n$, $b_n=\dfrac{l}{n\pi a}\psi_n$,
它与(2.1.15)完全一致.

由此可见，如果一开始就把解写成为(2.1.18)的形式，再按定解问题的要求去确定 $T_n(t)$，依然能够得出定解问题的解来，它还与分离变量法所得出的结果完全一致．我们把这种求解方法称为**试探法**．需要注意的是形式(2.1.18)已经适合边界条件（2.1.3）了.

§2-2 有界杆的热传导方程 点源函数

在讨论热传导方程的混合问题求解时，如果所取的边界条件全是第一类的，当使用分离变量法时，它与§2-1所运用过的求解方法完全相类似，这里就不再重复了．如果所取的边界条件其一端点上是第一类的，另一端点上是第二类的，当使用分离变量法时，其基本精神和步骤与§2-1所运用过的求解方法也是一致的，但在固有值问题上就有所不同了．现在就来讨论后一种情况下热传导方程的求解问题.

1 齐次边界条件的热传导

设有长度为 l 的，均匀的，内部无热源的热传导杆，其表面绝热．此时根据§1-1的讨论，应有齐次热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx},\quad 0<x<l,\ 0<t \tag{2.2.1}$$

同时假设杆的初始温度分布为

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{2.2.2}$$

杆的两端点的温度状态为

$$u(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0 \tag{2.2.3}$$

其中 $\varphi(x)$是已知函数.

现在我们就按分离变量法的步骤来求出定解问题（2.2.1)—(2.2.3)的解.

第一　求出 $X(x)$与 $T(t)$所满足的常微分方程

设解的形式

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t) \tag{2.2.4}$$

这里 $X(x)$为变量 x 的函数，$T(t)$为变量 t 的函数. 把(2.2.4)代入(2.2.1)中，就得出

$$X(x)\cdot T'(t)=a^2X''(x)\cdot T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

这式的左端是变量 t 的函数，右端是变量 x 的函数，变量 x 与 t 彼此是无关的，因此，等式要成立必须同时为常数. 我们取这个常数为$-\lambda$，于是就得出 $T(t)$与 $X(x)$应适合两个常微分方程

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0 \tag{2.2.5}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{2.2.6}$$

第二　解固有值问题，求出固有值与固有函数

为了要(2.2.4) 能适合边界条件 $u(0,t)=X(0)\cdot T(t)=0$ 与 $u_x(l,t)=X'(l)\cdot T(t)=0$，因为 $T(t)$不能恒为零，所以

$$X(0)=X'(l)=0 \tag{2.2.7}$$

于是求解问题(2.2.1)与(2.2.3)就变成为求解边值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X'(l)=0 \end{cases} \tag{2.2.8}$$

与常微分方程(2.2.5)了.

边值问题(2.2.8)本质上是一个固有值问题，我们仿照§2-1中关于固有值问题(2.1.8)的讨论，就得出 $\lambda>0$ 时，$X(x)=C\sin\sqrt{\lambda}\,x$，由于 $X'(l)=0$，即 $\cos\sqrt{\lambda}\,l=0$，所以 $\sqrt{\lambda}\,l=\frac{(2n+1)}{2}\pi$，亦即

$$\sqrt{\lambda_n}=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{2.2.9}$$

相应的固有函数为

$$X_n(x)=C_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l},\ n=0,1,2,\cdots \tag{2.2.10}$$

将(2.2.9)中所得出的 $\lambda_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2/l^2$ 代入(2.2.5)中，求出通解为

$$T_n(t)=A_n e^{-\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right]^2\cdot t},\ n=0,1,2,\cdots \tag{2.2.11}$$

于是由(2.2.4)得出

$$u_n(x,t)=X_n(x)\cdot T_n(t)=a_n e^{-\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right]^2\cdot t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$$

$$n=0,1,2,\cdots \tag{2.2.12}$$

其中 a_n 是任意常数. 这里 $u_n(x,t)$ 适合方程(2.2.1)和边界条件(2.2.3)，下面立刻可看出，当它们按照某种方式叠加后，便可以适合初始条件(2.2.2)了.

第三　$u_n(x,t)$ 的叠加

上述求出的(2.2.12)是适合方程 (2.2.1) 和边界条件(2.2.3)，它们未必就能适合初始条件(2.2.2)，即当 $t=0$ 时，$u_n(x,t)$ 未必就能等于 $\varphi(x)$。但是按叠加原理，如果级数

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right]^2 t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l} \tag{2.2.13}$$

当 $x, t>0$ 是收敛的，设和函数为 $u(x,t)$，并且对 x，t 还二次逐项可微的，那末就可验证 $u(x,t)$ 必能适合热传导方程(2.2.1)和边界条件(2.2.3)。同时，如果恰当地选择系数 a_n，就有可能适合初始条件(2.2.2)。

第四　系数 a_n 确定

如果(2.2.13)中的函数 $u(x,t)$能适合初始条件(2.2.2)，即

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}=\varphi(x) \tag{2.2.14}$$

那末只要利用固有函数系 $\left\{\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}\right\}$，$n=0, 1, 2, \cdots$，的正交性，把上式乘以 $\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$后，并把 x 从 0 到 l 积分，就得出系数a_k应适合

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}dx,\quad k=0, 1, 2, \cdots \tag{2.2.15}$$

把这样求出的系数 a_k 的表达式(2.2.15)代入(2.2.13)后，直接就可验证所得出的 (2.2.13) 必为定解问题 (2.2.1)—(2.2.3) 的解了。

总之，经过上述四个步骤后，就可得出热传导方程定解问题(2.2.1)—(2.2.3)的解了．为了保证上述步骤的合理性，只要给出下述条件就足够了：(1) 如果 $\varphi(x)$在$[0, l]$上连续，且有分段连续的导数，(2) $\varphi(0)=\varphi'(l)=0$．那末定解问题(2.2.1)—(2.2.3)的解存在，并且这个解可用(2.2.13)式表示，其中 a_n 由(2.2.15)式确定．

下面验证级数(2.2.13)式确实是定解问题(2.2.1)—(2.2.3)的解．

我们注意到这样的事实：形式解(2.2.13)中每一项都满足方程(2.2.1)，因此只要证明．当 φ 满足给定条件时，级数(2.2.13)可以逐项对 x 微分二次，对 t 微分一次就行了．也就是说．如果证明了(2.2.13)对 x 微分二次、对 t 微分一次后仍是一致收敛的．那末由它表示的函数 $u(x, t)$ 一定满足方程(2.2.1)．此时初始条件和边界条件的满足也是显然的了．

根据 $\varphi(x)$在$[0, l]$上连续、且有分段连续的导数，可知级数$\sum\limits_{0}^{\infty}|a_n|$是收敛的，由不等式

$$\left|a_n e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2 \cdot t} \sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}\right| \leqslant |a_n|,\quad 0\leqslant x\leqslant l,\ t\geqslant 0$$

立刻可知级数(2.2.13)当 $0\leqslant x\leqslant l$、$t\geqslant 0$ 时是绝对一致收敛的，故级数(2.2.13)在 $0\leqslant x\leqslant l$、$t\geqslant 0$ 上确定了一个连续函数 $u(x, t)$．

我们证明．对于任意的 $\bar{t}>0$，当 $0\leqslant x\leqslant l$，$t\geqslant \bar{t}$ 时，(2.2.13)式逐项求导后的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

是一致收敛．事实上

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}=-a_n\cdot\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2\cdot t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}=-a_n\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2\cdot t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$$

设$|\varphi(x)|<M$，于是

$$|a_n|=\left|\frac{2}{l}\right|\left|\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}d\xi\right|<2M$$

由此得出，当$t\geqslant\bar{t}$时，

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|\leqslant 2M\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2\cdot\bar{t}}$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|\leqslant 2M\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\right)^2\cdot e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2\cdot\bar{t}}$$

用上述不等式的右端项作为通项(除去相差常数外)组成的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2\cdot\bar{t}}$$

根据达朗倍尔准则可知是收敛的。由此可知，当$0\leqslant x\leqslant l$，$t\geqslant\bar{t}$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}$、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$是绝对一致收敛的。由于$\bar{t}$的任意性，可知当$0\leqslant x\leqslant l$，$t>0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}$、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$是绝对一致收敛的。这就证明了(2.2.13)对$x$微分二次、对$t$微分一次后仍是一致收敛的。证毕。

如果将得出的系数a_k的表达式(2.2.15)代入解的表达式(2.2.13)中，由此便得出

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right]^2 t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}d\xi\right]e^{-\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right]^2 t}\cdot\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$$

$$=\int_0^l\left[\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right]^2 t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}\right]\varphi(\xi)d\xi$$

$$=\int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \qquad (2.2.16)$$

其中

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right]^2 t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l} \qquad (2.2.17)$$

例 设(2.2.2) 中 $\varphi(x)=cx(l-x)^2/l^3$. 则由 (2.2.15)式得出

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{cx(l-x)^2}{l^3}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2c}{l^4}\int_0^l x(l-x)^2\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2c}{l^4}\int_0^l(l^2x-2lx^2+x^3)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}dx$$

$$\left(设\ \lambda=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\right)$$

$$=\frac{2c}{\lambda^2 l^4}\left\{\frac{2l}{\lambda}\cos\lambda l-\frac{6}{\lambda^2}\sin\lambda l+\frac{4l}{\lambda}\right\}$$

$$=\frac{2c}{(\lambda l)^4}(2\lambda l\cos\lambda l-6\sin\lambda l+4\lambda l)$$

所以由(2.2.13)式得出

$$u(x,t)=\frac{4c}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-3(-1)^{n+1}\right]}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}\cdot e^{-\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right]^2 t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$$

2　点源函数

从（2.2.16）式我们可以看出，当杆上的瞬时初始温度分布 $\varphi(x)$为已知，则在任何时刻 $t>0$，杆上的任意点 x 处的温度状态便可用积分式（2.2.16）表达出来，其中函数 $G(x,\xi,t)$称为瞬时点源函数，有时亦称为瞬时点热源的温度**影响函数**．为了清晰地了解这一事实，我们给出较为仔细的说明．

设在杆的两端上温度始终保持 $u(0,t)=0$，$u_x(l,t)=0$．于初始瞬时 $t=0$ 在 $x=\xi_0$ 点的邻近小区间$(\xi_0-\varepsilon,\xi_0+\varepsilon)$上转瞬地放出了热量 Q，而在这个小区间外仍无热量的变化．因此在这区间内部由于放出热量 Q 所引起的温度变化 $\varphi_\varepsilon(\xi)$ 可视为正值的连续可微的函数，它还满足关系式

$$c\rho\int_{\xi_0-\varepsilon}^{\xi_0+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi=Q \qquad (2.2.18)$$

其中 ρ 是杆的线密度，c 是杆的比热．于是在这样的情况下，热量传播过程应由



图　2-2

$$u_\varepsilon(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi \qquad (2.2.19)$$

来描述了．

由于 $t>0$ 时 $G(x,\xi,t)$的连续性和(2.2.18)，并对固定的 x，t，利用微分中值定理后，则得出

$$u_\varepsilon(x,t)=\int_{\xi_0-\varepsilon}^{\xi_0+\varepsilon}G(x,\xi,t)\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi=G(x,\xi^*,t)\int_{\xi_0-\varepsilon}^{\xi_0+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi$$

$$=G(x,\xi^*,t)\frac{Q}{c\rho}$$

其中 $\xi_0-\varepsilon<\xi^*<\xi_0+\varepsilon$. 令 $\varepsilon\to0$, 注意到 $G(x,\xi,t)$ 对 ξ 的连续性，则得出

$$\lim_{\varepsilon\to0}u_\varepsilon(x,t)=\frac{Q}{c\rho}G(x,\xi_0,t)$$

$$=\frac{Q_0}{c\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{l}e^{-\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right]^2t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi_0}{l}\qquad(2.2.20)$$

如果热量 $Q=c\rho$，那末

$$\lim_{\varepsilon\to0}u_\varepsilon(x,t)=G(x,\xi_0,t)\qquad(2.2.21)$$

由(2.2.21)立刻可以看出，函数 $G(x,\xi_0,t)$ 表示在 $t=0$ 时放置于区间$(0,l)$内点 ξ_0 处强度为 $Q=c\rho$ 的瞬时热源引起的温度分布。换句话说，函数 $G(x,\xi_0,t)$ 就表示在 $t=0$ 时，放置于杆的 $x=\xi_0$ 点处强度为 $Q=c\rho$ 的瞬时热源所引起的温度分布状态。这就是函数 $G(x,\xi,t)$ 称为点源函数的理由所在。

类似§2-1中第三段，可用试探法求解. 即把解展开成固有函数系 $\left\{\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}\right\}$ 的级数，即 $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$，再令它适合 (2.2.1), (2.2.2), 还可得出解的表达式 (2.2.16).

§2-3 圆形域上的拉普拉斯方程

1 圆形域上的拉普拉斯方程

我们求解这样的拉普拉斯方程的定解问题：$u(x, y)$在半径为 r 的圆域内适合拉普拉斯方程

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \text{当}(x, y) \in x^2 + y^2 < r^2 \tag{2.3.1}$$

在圆周上具有条件

$$u|_{\rho=r} = f(\theta), (-\pi < \theta < \pi), f(-\pi) = f(\pi) \tag{2.3.2}$$

其中 θ 表示动点的极角，$f(\theta)$为已知函数.

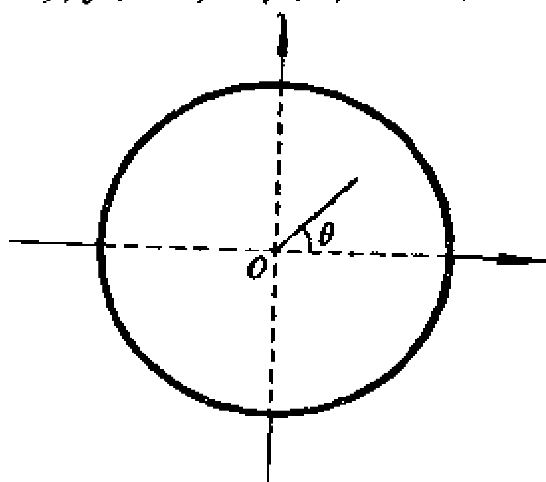


图 2-3

利用分离变量法求解定解问题(2.3.1)，(2.3.2)时，采取极坐标(ρ, θ)(取圆心为极点)去讨论较为方便．为此令

$$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta \tag{2.3.3}$$

将方程(2.3.1)化为极坐标形式

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0 \tag{2.3.4}$$

此时条件(2.3.2)便成为

$$u(r, \theta) = f(\theta), (-\pi < \theta < \pi), f(-\pi) = f(\pi) \tag{2.3.5}$$

其中 $f(\theta)$为已知函数．下面我们用分离变量法求解问题(2.3.4)，(2.3.5)，具体步骤如下：

第一 求出 $R(\rho)$ 与 $\Phi(\theta)$所满足的常微分方程

设解的形式为

$$u(\rho, \theta) = R(\rho)\Phi(\theta) \tag{2.3.6}$$

这里 $R(\rho)$为变量 ρ 的函数，$\Phi(\theta)$为变量 θ 的函数，把它代入(2.

3.4)中，就得出

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho}=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}$$

此式左端为变量 ρ 的函数，右边为变量 θ 的函数，又变量 ρ 与 θ 是彼此无关的。因此，要上式相等必须都是常数，我们取这个常数为 λ，于是就得出 $R(\rho)$ 与 $\Phi(\theta)$ 所适合的常微分方程

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}+\lambda\Phi(\theta)=0 \tag{2.3.7}$$

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}-\lambda R=0 \tag{2.3.8}$$

第二　解固有值问题，求出固有值与固有函数

我们讨论方程(2.3.7)与(2.3.8)的解：

1° 如果 $\lambda=0$，那末(2.3.7)的通解为 $\Phi(\theta)=A\theta+B$，这里 A 与 B 是任意常数；(2.3.8)的通解为 $R(\rho)=C\ln\rho+D$，这里 C 与 D 也是任意常数，于是由(2.3.6)得出

$$u(\rho,\theta)=R(\rho)\Phi(\theta)=(C\ln\rho+D)(A\theta+B)$$

应适合方程(2.3.4)。因为一般情况下所要求的解 $u(\rho,\theta)$ 是单值的，所以要求 $u(\rho,\theta)$(或者说 $\Phi(\theta)$)是 θ 的周期函数，即 $u(\rho,\theta+2\pi)=u(\rho,\theta)$，或 $\Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta)$，从而 $A=0$。另外当 $\rho=0$ 时，解 $u(\rho,\theta)$ 必须是有限的，从而 $C=0$。总之，由此得出

$$u_0(\rho,\theta)=\text{常数} \tag{2.3.9}$$

应为(2.3.4)的解。这一事实直接从方程(2.3.4)看一下也是十分明显的。

2° 如果 $\lambda<0$，则方程(2.3.7)的通解应为 $\Phi(\theta)=A\text{ch}\sqrt{-\lambda}\theta+B\text{sh}\sqrt{-\lambda}\theta$，这里 A 与 B 是任意常数。因为这样的 $\Phi(\theta)$ 不可能是周期函数，所以就不可能使得 $u(\rho,\theta)$ 成为单值函数。因此，λ 不能取负值。

3° 如果 $\lambda>0$，令 $\lambda=\omega^2$，那末方程(2.3.7)的通解为

$$\Phi(\theta)=A\cos\omega\theta+B\sin\omega\theta$$

这里 A 与 B 是任意常数. 由于一般情况下要求的 $u(\rho,\theta)$ 是单值函数，就必须要求 $u(\rho,\theta)$，或者说 $\Phi(\theta)$ 是 θ 的周期函数，即 $u(\rho,\theta+2\pi)=u(\rho,\theta)$，或 $\Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta)$，从而 ω 只能是取整数值 n 才有可能. 所以方程(2.3.7)的 λ 应为

$$\sqrt{\lambda_n}=\omega_n=n,\ (n=1,2,3,\cdots) \tag{2.3.10}$$

这里 n 取正整数值并不影响讨论的普遍性，相应的解应为

$$\Phi_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,\ (n=1,2,3,\cdots) \tag{2.3.11}$$

式(2.3.10)中的 $\sqrt{\lambda_n}$ 称为固有值，(2.3.11)中的 $\Phi_n(\theta)$ 就是与 $\sqrt{\lambda_n}$ 相对应的固有函数.

将(2.3.10)式中的 $\lambda_n=n^2$ 代入 (2.3.8)中，得出欧拉(Euler)方程

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}-n^2R=0 \tag{2.3.12}$$

令 $\rho=e^s$，则此方程化为 $\frac{d^2R}{ds^2}-n^2R(s)=0$ ①，其通解为 $R_n(s)=C_ne^{ns}+D_ne^{-ns}$，立刻可得出(2.3.12)的解应为

$$R_n(\rho)=C_n\rho^n+D_n\rho^{-n},\ (n=1,2,3,\cdots) \tag{2.3.13}$$

于是由(2.3.6)得出

$$u_n(\rho,\theta)=(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n})(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),$$
$$(n=1,2,3,\cdots) \tag{2.3.14}$$

是方程(2.3.4)的单值解函数. 另外，当 $\rho=0$ 时解 $u(\rho,\theta)$ 必须是有限的，从而 $D_n=0$，由此便得出

---

① 计算 $\frac{dR}{d\rho}=\frac{dR}{ds}\ \frac{ds}{d\rho}$，$\frac{d^2s}{d\rho^2}=\frac{d}{d\rho}\left(\frac{dR}{ds}\ \frac{ds}{d\rho}\right)=\frac{d^2R}{ds^2}\ \frac{1}{\rho^2}-\frac{dR}{ds}\ \frac{1}{\rho^2}$，代入原方程中整理后得出：$\rho^2\cdot\left[\frac{d^2R}{ds^2}\ \frac{1}{\rho^2}-\frac{dR}{ds}\ \frac{1}{\rho^2}\right]+\rho\frac{dR}{ds}\ \frac{1}{\rho}-n^2R(s)=\frac{d^2R}{ds^2}-n^2\ R(s)=0$.

$$u_n(\rho,\theta)=\rho^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),\ (n=1,2,3,\cdots) \tag{2.3.15}$$

是方程(2.3.4)的单值的，且在 $\rho=0$ 时是有限的解函数，其中 $a_n=C_nA_n$，$b_n=C_nB_n$ 是任意常数．下面立刻可看到它们在构成所要求的解中起十分重要的作用．

第三　$u_0(\rho,\theta)$，$u_n(\rho,\theta)$ 的叠加

上述求出的(2.3.9)，(2.3.15)都是方程(2.3.4)的解，它们未必就能适合边界条件(2.3.5)，即当 $\rho=r$ 时，这些 u_0，u_n 未必能等于 $f(\theta)$．但是按照叠加性原理，如果级数

$$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\rho^n \tag{2.3.16}$$

对任何 $\rho,\theta(0<\rho<r,\ -\pi<\theta<\pi)$ 是收敛的，设和函数为 $u(\rho,\theta)$，并且对 ρ,θ 二次逐项可微的，则可验证 $u(\rho,\theta)$ 必能适合极坐标下的拉普拉斯方程(2.3.4)．另外，$u(\rho,\theta)$ 是 θ 的周期函数，周期为 2π，因此 $u(\rho,\theta)$ 是单值函数．又当 $\rho=0$ 时，$u(\rho,\theta)$ 为有限的是十分明显的．同时，如果恰当的选择系数 a_n 与 b_n，还有可能使 $u(\rho,\theta)$ 也适合边界条件(2.3.5)．

第四　系数 a_n 与 b_n 的确定

如果(2.3.16)中的函数 $u(\rho,\theta)$ 能适合边界条件(2.3.5)，即

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n=f(\theta) \tag{2.3.17}$$

那末只要利用固有函数系

$$1,\ \cos\theta,\ \sin\theta,\ \cos 2\theta,\ \sin 2\theta,\ \cdots,\ \cos n\theta,\ \sin n\theta,\ \cdots$$

的正交性，把(2.3.17)式分别乘以 $\cos k\theta$ 与 $\sin k\theta$ 后，并把 θ 从 $-\pi$ 到 π 积分，则得出

$$a_k=\frac{1}{r^k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos k\theta d\theta,\ (k=0,1,2,\cdots)$$
$$b_k=\frac{1}{r^k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin k\theta d\theta,\ (k=1,2,\cdots) \tag{2.3.18}$$

再把这样求出的系数 a_k, b_k 的表达式(2.3.18)代入(2.3.16)后，就可验证这样得出的 $u(\rho,\theta)$ 必为定解问题(2.3.4)、(2.3.5)的解.

总之，当我们经过了上述四个步骤之后，就可得出拉普拉斯方程定解问题(2.3.4)、(2.3.5)的单值的、在 $\rho=0$ 时为有限的解 $u(\rho,\theta)$ 了. 为了要保证上述步骤进行的合理性，只要给出如下条件就足够了：$f(\theta)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且具有分段连续的一阶导数，还是周期 2π 的周期函数，把(2.3.18)式代入(2.3.17)式中，得出的 $u(\rho,\theta)$ 必为(2.3.4)，(2.3.5)的解①.

证明 只需要证明以(2.3.18)式代入(2.3.16)中，所得到的级数在圆 $\rho<r$ 内是一致收敛的，且可以二次逐项微分，还证明满足(2.3.17)式就够了. 用(2.3.18)式代入(2.3.16)式中得出

$$u(\rho,\theta)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}t^n(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta) \tag{2.3.16$_1$}$$

其中 α_0、α_n、β_n 表示如下：

$$\alpha_0=a_0,\ \alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos n\theta d\theta,\ \ \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin n\theta d\theta$$
$$t=\frac{\rho}{r}\leqslant 1,\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

现在证明刚才得出的(2.3.16$_1$)当 $t<1$ 时可以逐项微分. 令

$$u_n=t^n(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)$$

计算出函数 u_n 对 θ 的 k $(k=1,2)$ 阶导数如下：

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial\theta^k}=t^n n^k\cdot\left[\alpha_n\cos\left(n\theta+k\frac{\pi}{2}\right)+\beta_n\sin\left(n\theta+k\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

---

① 今后，本书中凡是用分离变量法求解的定解问题都假定它的定解条件满足一定的条件，以保证定解问题的解可以表示为级数的形式.

由此得出估计式如下：

$$\left|\frac{\partial^k u_n}{\partial\theta^k}\right| \leqslant t^n n^k 2M$$

其中 M 表示 α_n、β_n 的绝对值的最大值，即 $|\alpha_n|<M$，$|\beta_n|<M$. 关于某一固定的 $t_0=\frac{\rho_0}{r}<1$，当 $t\leqslant t_0<1$ 时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^k(|\alpha_n|+|\beta_n|)\leqslant 2M\cdot\sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k,\ (k=1,2)$$

是一致收敛的. 从而级数(2.3.16₁)式在半径为 $\rho_0<r$ 的圆内任意一点对 θ 可以二次逐项微分. 用类似的方法，可以证明级数（2.3.16₁）式在半径为 $\rho_0<r$ 的圆内任意一点对 ρ 能够二次逐项微分. 由于 ρ_0 的任意性，所以级数(2.3.16₁)在圆内($\rho<r$) 任意一点都可以对 ρ、θ 二次逐项微分. 由于(2.3.16₁)式的每一项都满足(2.3.4)，所以(2.3.16₁)式也满足(2.3.4).

由 $f(\theta)$ 的假设，可知 $f(\theta)$ 可以展开成为付里叶级数，并且由此推得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|+|\beta_n|)<\infty$$

收敛. 又从 $t=\frac{\rho}{r}\leqslant 1$ 的定义，有

$$|t^n\alpha_n\cos n\theta|\leqslant|\alpha_n|,\ |t^n\beta_n\sin n\theta|\leqslant|\beta_n|$$

所以级数(2.3.16₁)当 $t\leqslant 1$ 时是一致收敛的，从而由(2.3.16₁)所表示的函数 $u(\rho,\theta)$ 在圆 $\rho\leqslant r$ 上亦是连续的，令 $\rho\to r$（即 $t\to 1$）时，(2.3.16₁)变为(2.3.17)式，边界条件(2.3.17)得到满足. 证毕.

值得在此提一下，求解固有值问题时，固有值和固有函数是根据解 $u(\rho,\theta)$ 的单值性所确定的，它不是由什么边界条件去确定，这和以往确定固有值及其固有函数的方法不同，须要引起我们注意.

类似 § 2-1 中第三段，可用试探法求解，即把解展开成固有函数系：1, $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cdots\cos n\theta$, $\sin n\theta$, $\cdots$的级数，即

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(\rho)\cos n\theta+b_n(\rho)\sin n\theta)$$

再令它适合(2.3.4),(2.3.5),还可得出解的表达式(2.3.16).

2 泊松公式

如果将系数 a_k, b_k 的表达式(2.3.18)代入(2.3.16)中，并交换求和与积分次序后，那末得出

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(\theta-\varphi)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\right\}d\varphi \tag{2.3.19}$$

由于下列恒等式成立：当 $|t|<1$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(\theta-\varphi)t^n&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{in(\theta-\varphi)}+e^{-in(\theta-\varphi)}\right]t^n\\&=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(te^{i(\theta-\varphi)})^n+(te^{-i(\theta-\varphi)})^n\right]\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{te^{i(\theta-\varphi)}}{1-te^{i(\theta-\varphi)}}+\frac{te^{-i(\theta-\varphi)}}{1-te^{-i(\theta-\varphi)}}\right\}\\&=\frac{1}{2}\frac{1-t^2}{1-2t\cos(\theta-\varphi)+t^2}\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

取 $t=\frac{\rho}{r}(<1)$，将(2.3.20)代入(2.3.19)式，则得出

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\frac{r^2-\rho^2}{\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi \tag{2.3.21}$$

公式(2.3.21)称为泊松公式，它表示了定解问题(2.3.4),(2.3.5)的单值的，在 $\rho=0$ 处为有限的解的积分表达式.

总结前面三节的讨论，把分离变量法的主要步骤归结如下：

第一 将偏微分方程定解问题通过分离变量法转化为常微分

方程的边值问题.

第二　解固有值问题，求出固有值与固有函数. 与此同时再解出常微分方程.

第三　把得到的解乘起来成为 u_n，再将它们叠加成为包含有任意常数的无穷级数——付里叶级数.

第四　利用付里叶级数法，定得任意常数为付里叶系数.

§2-4　有界均匀弦的强迫振动方程，试探解法

1　端点固定的强迫振动

这节里我们要讨论两端点固定的强迫振动弦的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \quad 0<x<l,0<t & (2.4.1)\\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x) & (2.4.2)\\ u(0,t)=0, u(l,t)=0 & (2.4.3)\end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 均为已知函数，$\rho f(x,t)$ 是弦上单位长所受的外力，ρ 是弦的线性密度.

现在求出定解问题(2.4.1)—(2.4.3)的解.若把方程(2.4.1)与(2.1.1)比较一下，可以看出它们之间所不同的只有一个自由项 $f(x,t)$，于是我们可以设想，强迫振动的定解问题与§2-1中自由振动的定解问题之解，在构造的形式上会不会有某种联系呢？回忆一下，在常微分方程里，齐次与非齐次方程的解之间是相互有联系的，这是大家所熟悉的. 因此可以推想一下，势必(2.1.1)与(2.4.1)的解在构造形式方面也会存在着某种联系. 事实上，下面就可以看到这种设想是成功的.

在§2-1中，我们令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，用分离变量法把适合(2.1.1)的 $u(x,t)$ 转化为两个常微分方程(2.1.5)与(2.1.6)，可是此法对(2.4.1)就不可能了. 然而前节中把定解问题的解写

成为驻波形式后叠加，即

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x) \tag{2.4.4}$$

再去恰当地确定出 $X_n(x)$ 与 $T_n(t)$ 的基本思想仍然是十分成功的．在此把这种求解方法称为**试探法**，这与§2-1 中的提法完全一样．现在来说明利用这种基本思想解决定解问题(2.4.1)—(2.4.3)的主要步骤：

第一　函数 $X_n(x)$ 的确定

设 $X_n(x)$ 适合边界条件，即 $X_n(0)=X_n(l)=0$，这样就有可能使叠加起来的解 $u(x,t)$ 即(2.4.4)也适合边界条件(2.4.3)．另外，如再把 t 看成为参变数，那末(2.4.4)可以看成为 $u(x,t)$ 按 $\{X_n(x)\}$ 的付里叶级数展开式，其中 $T_n(t)$ 是付里叶展开系数．由§2-1 中讨论我们已经知道，与(2.4.1)相应的自由振动方程(2.1.1)，在边界条件(2.1.3)下经分离变量法后，得出固有值问题

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ X(0)=X(l)=0$$

的解为一串函数：$X_n(x)=c_n\sin\frac{n\pi x}{l}$，$n=1,2,3,\cdots$，由它们确实能够构造出付里叶级数，其中 $T_n(t)$ 就是付里叶系数，恰当地定出后，即要求适合初始条件(2.1.2)，就得出解来．因此，我们就取(2.4.4)中的

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,3,\cdots$$

这里，去掉常数 c_n 并不影响问题的本质．

第二　函数 $T_n(t)$ 的确定

从第一的分析，我们假设

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.4.5}$$

显然(2.4.5)适合边界条件(2.4.3)，现进一步要求(2.4.5)适合方程(2.4.1)及初始条件(2.4.2)．为此，我们把函数$f(x,t)$，$\varphi(x)$与$\psi(x)$也按三角函数系$\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$展开成为付里叶级数，即

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi \tag{2.4.6}$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi \tag{2.4.7}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi \tag{2.4.8}$$

将所得出的(2.4.5)及(2.4.6)代入方程(2.4.1)中，则得出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\ddot{T}_n(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)-f_n(t)\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

由此(2.4.5)中的付里叶系数应适合

$$\ddot{T}_n(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=f_n(t),\quad n=1,2,3,\cdots \tag{2.4.9}$$

若再把(2.4.5)、(2.4.7)与(2.4.8)代入初始条件(2.4.2)中，同样，得出

$$T_n(0)=\varphi_n,\dot{T}_n(0)=\psi_n,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{2.4.10}$$

因此，如能求出常微分方程(2.4.9)适合初始条件(2.4.10)的

解 $T_n(t)$，再把它代入(2.4.5)中去，容易验证这样的 $u(x,t)$ 就是定解问题(2.4.1)—(2.4.3)的解.

(2.4.9)是二阶线性常系数微分方程，按照常微分方程的解法[附录 I]，可求得(2.4.9)与(2.4.10)的解为

$$T_n(t)=\left\{\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right\}+\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(t)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)d\tau \qquad (2.4.11)$$

$$n=1,2,3,\cdots$$

将(2.4.11)代入(2.4.5)中就得出解的表达式

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$+\frac{l}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)d\tau\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$=u^{(I)}(x,t)+u^{(II)}(x,t) \qquad (2.4.12)$$

其中

$$u^{(I)}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right\}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (2.4.13_1)$$

$$u^{(II)}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)d\tau\right\}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (2.4.13_2)$$

总之，经过上述两个步骤后，可得出定解问题(2.4.1)—(2.4.3)的解 $u(x,t)$的表达式。要相信这一事实的正确性，只需要将(2.4.12)代入验证就可明白。

值得提醒一下，这个方法成功的关键：一是函数系$\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$($n=1, 2, 3, \cdots$)的选择，它是正交系，且适合边界条件(2.4.3)；二是函数系$\{T_n(t)\}$($n=1, 2, 3, \cdots$)的恰当确定，使得(2.4.5)中的$u(x, t)$既适合方程(2.4.1)又适合初始条件(2.4.2)。

例 设$f(x, t)=-g$, g是正的充分小的常数，$\varphi(x)=\frac{x(l-x)}{M}$($M$是常数)，$\psi(x)=0$，那末由(2.4.6)—(2.4.8)可得出

$$f_n=-\frac{2}{l}\int_0^l g\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\frac{2g}{n\pi}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\Big|_0^l$$

$$=\frac{2g}{n\pi}\{(-1)^n-1\}$$

$$=\begin{cases}-\frac{4g}{n\pi}, & n=1, 3, 5, \cdots\\ 0, & n=2, 4, 6, \cdots\end{cases}$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{\xi(l-\xi)}{M}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$=\frac{4l^2}{n^3\pi^3M}\{1-(-1)^n\}$$

$$=\begin{cases}\frac{8l^2}{n^3\pi^3M}, & n=1, 3, 5, \cdots\\ 0, & n=2, 4, 6, \cdots\end{cases}$$

$$\psi_n=0,\ n=1, 2, 3, \cdots$$

从而由(2.4.9)，(2.4.10)得出

$$\begin{cases}\ddot{T}_n(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=\frac{2g}{n\pi}\{(-1)^n-1\}\\ T_n(0)=\frac{4l^2}{n^3\pi^3M}\{1-(-1)^n\},\\ \dot{T}_n(0)=0\end{cases}$$

的解(或直接利用公式(2.4.11))

$$T_n(t)=\frac{2l^3}{n^3\pi^3}\left(\frac{2}{M}+\frac{g}{a^2}\right)\{1-(-1)^n\}\cos\frac{n\pi at}{l}$$
$$-\frac{2gl^2}{n^3\pi^3a^2}\{1-(-1)^n\}$$

于是将上述所得出的 $T_n(t)$代入(2.4.5)后，则得出弦振动状态为

$$u(x,t)=\frac{4l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot$$
$$\cdot\left[\left(\frac{2}{M}+\frac{g}{a^2}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}-\frac{g}{a^2}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

它可表示为给出的初始条件下的弦的自由振动状态

$$u^{(I)}(x,t)=\frac{8l^2}{\pi^3M}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot$$
$$\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

及零初始条件时有外力作用下弦的强迫振动状态

$$u^{(II)}(x,t)=-\frac{4l^2g}{\pi^3a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot$$
$$\cdot\left[1-\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

之和，而且这两种振动状态在弦的端点始终保持着静止状态。

2　其他定解问题

用类似于 1 中的方法，可以得出热传导方程的定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,\ 0<t\\ u(x,0)=\varphi(x) & \\ u(0,t)=0, & u(l,t)=0\end{cases}\tag{2.4.14}$$

的解的表达式。事实上，设(2.4.14)的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.4.15}$$

将 $f(x,\ t)$、$\varphi(x)$展开成为三角函数系$\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$的级数后，再把这些展开式代入(2.4.14)中，得出常微分方程初始值问题

$$\begin{cases} T_n'(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t) \\ T_n(0)=\varphi_n \end{cases} \tag{2.4.16}$$

其中

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi,$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi \tag{2.4.17}$$

求出(2.4.16)的解后，得出[附录 II]

$$T_n(t)=\varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}+\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\cdot(t-\tau)}d\tau \tag{2.4.18}$$

把(2.4.18)代入(2.4.15)后，得出(2.4.14)的解的表达式

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\{\varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} + \int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)\cdot(t-\tau)}d\tau\}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.4.19}$$

§2-5 有界杆的有热源的热传导方程试探解法

1 齐次边界条件有热源的热传导

在第一章§1-1中，我们已经推导了均匀杆在其内部有热源

存在时，热量传播的规律可以用非齐次热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),\ 0<x<l,\ 0<t \tag{2.5.1}$$

描述，其中 $f(x, t) = F(x, t)/c\rho$，$F(x, t)$是杆内部的热源密度，c 是杆的比热，ρ 是杆的密度。

现在设杆上的初始温度分布为

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{2.5.2}$$

杆的两端边界条件为

$$u(0, t) = 0,\quad u_x(l, t) = 0 \tag{2.5.3}$$

我们求解方程(2.5.1)在初始条件(2.5.2)及边界条件(2.5.3)的解.

完全与§2-4中求解定解问题(2.4.1)—(2.4.3)时的方法一样，利用试探法求出定解问题(2.5.1)—(2.5.3)的解 $u(x, t)$，就是把要求的解写为形式

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x) \tag{2.5.4}$$

然后根据定解问题(2.5.1)—(2.5.3)的要求恰当地选择未定的函数 $T_n(t)$与 $X_n(x)$. 下面说明究竟应如何选择 $T_n(t)$ 与 $X_n(x)$，才能使得(2.5.4)式恰好就是定解问题(2.5.1)—(2.5.3)的解.

第一 函数 $X_n(x)$的确定

完全与§2-4的1中的想法一样，如果设

$$X_n(x) = \sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l},\quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{2.5.5}$$

那末由(2.5.4)得出

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l} \tag{2.5.6}$$

显然，(2.5.6)必适合边界条件(2.5.3)。这一事实只要代入即可得知是真实的。

第二　函数 $T_n(t)$的确定

由(2.5.6)式所确定的 $u(x,\ t)$必适合边界条件(2.5.3)，因此，要它是定解问题(2.5.1)—(2.5.3)的解，剩下的就是要求恰当地选择 $T_n(t)$，使其适合方程(2.5.1)和初始条件(2.5.2)。为此，把函数 $f(x,\ t)$和 $\varphi(x)$按正交三角函数系 $\left\{\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}\right\}$，$n=0,1,2,3,\cdots$展开为付里叶级数，即

$$f(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}, \tag{2.5.7}$$

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\ t)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \xi}{l}d\xi$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}, \tag{2.5.8}$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \xi}{l}d\xi$$

将所得出的(2.5.6)及(2.5.7)代入方程(2.5.1)中，得出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n(t)+\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)\right.$$

$$\left.-f_n(t)\right]\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}=0$$

由此(2.5.6)中的付里叶系数应适合

$$\dot{T}_n(t)+\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t),$$

$$n=0,1,2,\cdots. \tag{2.5.9}$$

若再把(2.5.6)和(2.5.8)代入初始条件(2.5.2)中,同样得出

$$T_n(0)=\varphi_n,\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{2.5.10}$$

因此,如果能求出一阶常微分方程(2.5.9)的适合初始条件(2.5.10)的解$T_n(t)$,再把它代入(2.5.6)中去,就得出定解问题(2.5.1)—(2.5.3)的解.

(2.5.9)式是一阶线性常系数微分方程,按常微分方程的解法,可求得(2.5.9)及(2.5.10)的解为

$$T_n(t)=\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau$$

$$+\varphi_n e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2 t}, \tag{2.5.11}$$

把它代入(2.5.6)中,就得出解的表达式

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]\right.$$

$$\left.+\varphi_n e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2 t}\right\}\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}+\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2 t}\cdot$$

$$\cdot \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$$

$$= u^{(\mathrm{I})}(x, t) + u^{(\mathrm{II})}(x, t) \tag{2.5.12}$$

其中

$$u^{(\mathrm{I})}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2 \cdot (t-\tau)} d\tau\right] \cdot$$

$$\cdot \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l} \tag{2.5.13$_1$}$$

$$u^{(\mathrm{II})}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2 \cdot t}$$

$$\cdot \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l} \tag{2.5.13$_2$}$$

总之，经过上述二个步骤之后，就可得出定解问题(2.5.1)—(2.5.3)的解的表达式(2.5.12)式. 要相信这一事实的正确性，只要将(2.5.12)直接代入验证就可以明白.

如果我们把这里所用的方法与 § 2-4 中已用过的方法比较一下就可看出，它们之间的基本精神与步骤是一致的，但存在着如下的差别：一是函数系$\{X_n(x)\}$的选择不同，这里选择的正交函数系是$\left\{\sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}\right\}$，$n=0, 1, 2, \cdots$，它是由边界条件(2.5.3)所确定，而在 § 2-4 中所选择的正交函数系是$\left\{\sin \frac{n\pi x}{l}\right\}$，$n=1, 2, \cdots$，它是由当时的边界条件(2.4.3)[即 $u(0, t)=u(l, t)=0$] 确定的。正是因为边界条件的差别，因此，相应的固有函数系就完全两样了。

二是函数系$\{T_n(t)\}$的选择亦是不同的，这里选择的$T_n(t)$是一阶常微分方程(2.5.9)在初始条件(2.5.10)下的解(2.5.11)式，在§2-4中所选择的$T_n(t)$却是二阶常微分方程(2.4.9)在初始条件(2.4.10)下的解(2.4.11)，从而，这里的(2.5.11)式就与(2.4.11)式截然不同了．因而，所得出的(2.5.12)式与(2.4.12)式也是不同的．从物理现象分析，这里的(2.5.12)式描述的是均匀杆上热量传播的规律，当时刻t无限地延续下去，热量传播将会逐渐平稳下来，以致日趋稳定状态；而(2.4.12)式描述的却是均匀弦的强迫振动，如果作用于弦上的外力是周期的，又介质的阻力可以忽略，那末均匀弦将会随时刻t无限地延续下去，必永远振动而不会停止．

例 设 $f(x,t)=\left(cx\sin\frac{\pi x}{2l}\right)\Big/l^2$，$\varphi(x)=\frac{cx(l-x)^2}{l^3}$，其中$c$是常数．则从(2.5.7)和(2.5.8)可得到

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{cx\sin\frac{\pi x}{2l}}{l^2}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2c}{l^3}\int_0^l x\cdot\left[\cos\frac{(n+1)\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi x}{l}\right]dx$$

由此便知

$$f_0(t)=\frac{2c}{l^3}\int_0^l x\sin^2\frac{\pi x}{2l}dx=\frac{8c}{l\pi^2}$$

$$f_n(t)=\frac{2c}{l^3}\left\{\frac{l^2}{(n+1)^2\pi^2}[(-1)^{n+1}-1]\right.$$

$$\left.-\frac{l^2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\right\}$$

$$=\frac{2c}{l\pi^2}\cdot\begin{cases}\dfrac{2}{(2k-1)^2}, & n=2k-1,\\[2mm] \dfrac{-2}{(2k+1)^2}, & n=2k,\end{cases}\qquad k=1,2,3,\cdots$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \frac{cx(l-x)^2}{l^2}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{4c}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4}\left\{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+3(-1)^{n+1}\right\}$$

另外

$$\int_0^t f_0(\tau)e^{-\left(\frac{\pi a}{2l}\right)^2(t-\tau)}d\tau=\frac{8cl}{a^2\pi^4}\left[1-e^{-\left(\frac{a\pi}{2l}\right)^2 t}\right]$$

$$\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)a\pi}{l}\right]^2(t-\tau)}d\tau$$

$$=f_n\left[\frac{1}{\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)a\pi}{l}\right)^2}\right]\left\{1-e^{-\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)a\pi}{l}\right]^2 t}\right\}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4cl}{a^2\pi^4(2k-1)^2\left(2k-1+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\left\{1-e^{\frac{-\left(2k-1+\frac{1}{2}\right)^2a^2\pi^2}{l^2}t}\right\}, & n=2k-1\\[2ex] \dfrac{-4cl}{a^2\pi^4(2k+1)^2\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\left\{1-e^{\frac{-\left(2k-\frac{1}{2}\right)a^2\pi^2}{l^2}t}\right\}, & n=2k,\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

于是由(2.5.12)式就得出解为

$$u(x,t)=\frac{8cl}{a^2\pi^4}\left(1-e^{-\left(\frac{a\pi}{2l}\right)^2}\right)\sin\frac{\pi x}{2l}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4cl}{a^2\pi^4(2n-1)^2\left(2n-1+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left(1-e^{-\frac{\left(2n-1+\frac{1}{2}\right)^2 a^2\pi^2}{l^2}t}\right)\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{\left(2n-1+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4cl}{a^2\pi^4(2n+1)^2\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left(1-e^{-\frac{\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2 a^2\pi^2}{l^2}t}\right)\cdot\sin\frac{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$$

$$+\frac{4c}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+3(-1)^{n+1}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}\cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}.$$

2 其它定解问题

用类似于1中的方法，可以得出弦振动方程的定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,0<t\\ u(x,0)=\varphi(x), & u_t(x,0)=\psi(x)\\ u(0,t)=0, & u_x(l,t)=0\end{cases}\tag{2.5.14}$$

的解的表达式．事实上，设(2.5.14)的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\tag{2.5.15}$$

将 $f(x,t)$，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 展开成为三角函数系 $\left\{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right\}$ 的级数后，再把这些展开式代入(2.5.14)中，得出常微分方程初始值问题

$$\begin{cases}\ddot{T}_n(t)+\left(\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t) \\ T_n(0)=\varphi_n,\ \dot{T}_n(0)=\psi_n\end{cases} \tag{2.5.16}$$

其中

$$\begin{aligned} f_n(t)&=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{l}d\xi, \\ \varphi_n&=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{l}d\xi \\ \psi_n&=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{l}d\xi \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

求出(2.5.16)的解后，得出

$$\begin{aligned} T_n(t)=&\left\{\varphi_n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi a t}{l}\right. \\ &+\left.\frac{l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}\psi_n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi a t}{l}\right\} \\ &+\frac{l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi a}{l}(t-\tau)d\tau \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

把(2.5.18)代入(2.4.15)后，得出(2.5.14)的解的表达式

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\varphi_n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi a}{l}t\right.$$

$$+\frac{l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}\psi_n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi a}{l}t$$

$$+\frac{l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi a}{l}(t-\tau)d\tau\Big\}\cdot$$

$$\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l} \tag{2.5.19}$$

§2-6 泊松方程的处理

这节我们要讨论泊松方程

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=p(x,y) \tag{2.6.1}$$

在条件 $u|_L=f$ 下的边值问题，其中 $p(x,y)$，$f(x,y)$是已知函数。显然，当方程(2.6.1)中 $p(x,y)=0$ 时，即为拉普拉斯方程.

如果能够选择到方程(2.6.1)的某一个确定解 $V(x,y)$，令 $u=W+V$，由于 $\Delta u=\Delta W+\Delta V=\Delta W+p$，那末方程(2.6.1)就转化为未知函数$W$的拉普拉斯方程

$$\Delta W=W_{xx}-W_{yy}=0 \tag{2.6.2}$$

在条件 $W|_L=f-V|_L=\tilde{f}$ 下的边值问题，从而就将泊松方程(2.6.1)的边值问题归结为拉普拉斯方程(2.6.2)的边值问题. 当求得了方程(2.6.2)的边值问题解 $W(x,y)$ 以后，再与方程(2.6.1)的确定解 $V(x,y)$一起叠加，即 $u=W+V$，就得出方程(2.6.1)的边值问题解.

下面我们用方程(2.6.1)在矩形域 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$ 上的狄利克莱边值问题

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=p(x,y) \tag{2.6.1}$$

$$\begin{cases} u(0,y)=\varphi(y), & u(a,y)=\psi(y) \\ u(x,0)=\mu(x), & u(x,b)=\nu(x) \end{cases} \tag{2.6.3}$$

为例说明这种方法．首先选择出方程(2.6.1)的确定解 V，令

$$u=W+V \tag{2.6.4}$$

其中 $W(x,y)$ 是待定的函数．用(2.6.4)代入方程(2.6.1)和边界条件(2.6.3)中，则由(2.6.1)和(2.6.3)确定的狄利克莱边值问题就转化为以 $W(x,y)$ 为未知函数的拉普拉斯方程的狄利克莱边值问题

$$\begin{cases}\Delta W=W_{xx}+W_{yy}=0 & (2.6.2)\\ W(0,y)=\bar{\varphi}(y), & \\ W(a,y)=\bar{\psi}(y) & \\ W(x,0)=\bar{\mu}(x), & (2.6.5)\\ W(x,b)=\bar{\nu}(x) & \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}\bar{\varphi}(y)=\varphi(y)-V|_{x=0}, & \bar{\psi}(y)=\psi(y)-V|_{x=a}\\ \bar{\mu}(x)=\mu(x)-V|_{y=0}, & \bar{\nu}(x)=\nu(x)-V|_{y=b}\end{cases} \tag{2.6.6}$$

由于 V 是预先选定的函数，φ,ψ,μ,ν 都是已知，所以(2.6.6)中 $\bar{\varphi},\bar{\psi},\bar{\mu},\bar{\nu}$ 全都是已知的函数，因而用分离变量法可求出边值问题(2.6.2)，(2.6.5)的 $W(x,y)$．将这样得到的解 $W(x,y)$ 和已经选好的确定解 V 一起代入(2.6.4)中，容易验证所得出的 u 就是泊松方程边值问题(2.6.1)，(2.6.3)的解．

下面我们简要的说明应该如何选择函数 V 的问题．显然可以看到，函数 V 的选择是与泊松方程(2.6.1)的右端函数 $p(x,y)$ 有着非常密切的关系，因此要能够选择好函数 V，就必须根据函数 $p(x,y)$ 的具体形状进行分析．例如，方程 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=2$，就可以选择函数 $V=x^2$，或 $V=y^2$，或 $V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，又方程 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=xy$，可以选择函数 $V=\frac{1}{6}x^3y$，或 $V=\frac{1}{6}xy^3$，或 $V=\frac{1}{12}(x^3y+xy^3)$，等等．我们还可以给出求方程(2.6.1)的确定解 V 的普遍方

法，就是：如果函数 $p(x,y)$在所给出的区域Ω直到边界都是连续的，并且在区域Ω内有连续的一阶偏导数，则在所给出的区域Ω内每一点处，函数表达式

$$V(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}p(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}d\xi d\eta \tag{2.6.7}$$

必然适合泊松方程．读者可以自己验证这一事实的正确性．

§2-7 边界条件的齐次化法

前面已讨论过的定解问题的解法，不论方程是齐次的，或者是非齐次的，边界条件全都是齐次的．如果遇到非齐次边界条件时，应该怎么办？总的原则是设法将边界条件转化为齐次的．具体地说，就是选取一个适当的未知函数之间的替换，使对新的未知函数，边界条件是齐次的．下面以弦振动的定解问题为例，说明选取替换的方法．

设有定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad 0<x<l, 0<t & (2.7.1)\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x) & (2.7.2)\\ u(0,t)=\mu(t), \quad u(l,t)=\nu(t) & (2.7.3)\end{cases}$$

我们要适当地作一替换，将边界条件(2.7.3)转化为齐次的．为此令

$$u(x,t)=V(x,t)+W(x,t) \tag{2.7.4}$$

适当地选取 $W(x,t)$使$V(x,t)$的边界条件转化为齐次的，即

$$V(0,t)=V(l,t)=0 \tag{2.7.5}$$

由(2.7.3)与(2.7.4)可知，要(2.7.5)式成立，只要选取 W，使其满足

$$W(0,t)=\mu(t),\quad W(l,t)=\nu(t) \tag{2.7.6}$$

就能合乎要求．可是满足(2.7.6)要求的函数 $W(x,t)$是很多的，例如图 2-4 中的 $W(x,t)$，$W_1(x,t)$，$W_2(x,t)$，…等等，都能满足

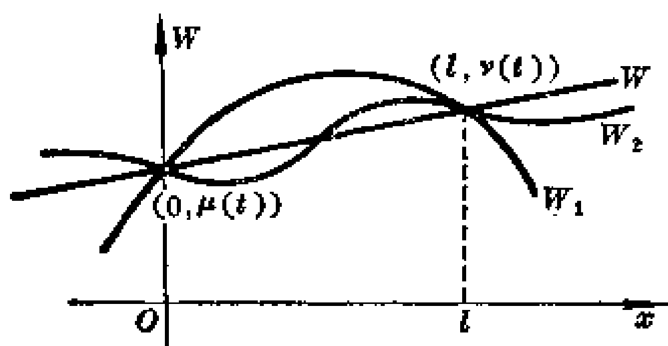


图 2-4

(2.7.6)的要求，那么究竟选取哪一个？为了使以后的计算简便，选取W为x的一次式，即取

$$W(x,t)=A(t)x+B(t)$$

为好，其中 $A(t)$及 $B(t)$用条件(2.7.6)式确定为

$$A(t)=\frac{\nu(t)-\mu(t)}{l},\quad B(t)=\mu(t)$$

从而函数

$$W(x,t)=\frac{\nu(t)-\mu(t)}{l}x+\mu(t) \tag{2.7.7}$$

就满足(2.7.6)的要求．

总之，只要作一替换

$$u(x,t)=V(x,t)+\left[\frac{\nu(t)-\mu(t)}{l}x+\mu(t)\right] \tag{2.7.4}$$

之后，就能使新的未知函数 $V(x,t)$满足齐次边界条件下的定解问题

$$\begin{cases} V_{tt}=a^2V_{xx}+f_1(x,t), \quad 0<x<l, 0<t & (2.7.8)\\ V(x,0)=\varphi_1(x), \quad V_t(x,0)=\psi_1(x) & (2.7.9)\\ V(0,t)=0, \quad V(l,t)=0 & (2.7.10)\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} f_1(x,t)=f(x,t)-\left[\dfrac{\nu''(t)-\mu''(t)}{l}x+\mu''(t)\right], \\ \varphi_1(x)=\varphi(x)-\left[\dfrac{\nu(0)-\mu(0)}{l}x+\mu(0)\right], \\ \psi_1(x)=\psi(x)-\left[\dfrac{\nu'(0)-\mu'(0)}{l}x+\mu'(0)\right] \end{cases} \tag{2.7.11}$$

定解问题 (2.7.8)—(2.7.10) 可用 § 2-4 中的方法求解，再将此解代入(2.7.4)即得出原问题的解.

倘若 f, μ, ν 都与 t 无关，则可选取适当的 $W(x)$(也与 t 无关)，使 $V(x,t)$的方程与边界条件同时都转化为齐次的，这样做就省掉了对 V 要解非齐次方程的繁琐工作. 具体做法举例如下.

例 求下列定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x),\ 0<x<l,\ 0<t & (2.7.12) \\ u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x) & (2.7.13) \\ u(0,t)=A,\quad u(l,t)=B & (2.7.14) \end{cases}$$

其中 f, φ, ψ 均为已知函数，A, B均为常数.

解 由于这个定解问题中方程的自由项 $f(x)$ 及边界条件都与 t 无关. 所以我们有可能经过一次替换将方程及边界条件都转化为齐次的. 具体步骤如下：令

$$u(x,t)=V(x,t)+W(x) \tag{2.7.15}$$

以此代入(2.7.12)得出

$$V_{tt}=a^2[V_{xx}+W''(x)]+f(x)$$

为了使这个方程及边界条件(2.7.14)同时转化为齐次的，选$W(x)$满足

$$\begin{cases} a^2W''(x)+f(x)=0 \\ W(0)=A,\ W(l)=B \end{cases} \tag{2.7.16}$$

之后，与此相应的$V(x,t)$应为齐次方程及齐次边界条件下问题

$$\begin{cases} V_{tt}=a^2V_{xx} & (2.7.17) \\ V(x,0)=\varphi_1(x),\quad V_t(x,0)=\psi_1(x) & (2.7.18) \\ V(0,t)=0,\quad V(l,t)=0 & (2.7.19) \end{cases}$$

的解，其中

$$\varphi_1(x)=\varphi(x)-W(x),\ \psi_1(x)=\psi(x)$$

(2.7.16)是二阶线性常微分方程的边值问题， 其解 $W(x)$的表达式为

$$W(x)=A+(B-A)\frac{x}{l}+\frac{x}{l}\int_0^l\left[\frac{1}{a^2}\int_0^\eta f(\xi)d\xi\right]d\eta$$

$$-\int_0^x\left[\frac{1}{a^2}\int_0^\eta f(\xi)d\xi\right]d\eta \qquad (2.7.20)$$

又(2.7.17)—(2.7.19)的解 $V(x,t)$可用§2-1 中的方法求出，其表达式为

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (2.7.21)$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

以(2.7.20)及(2.7.21)代入(2.7.15)即得出原问题的解.

假设边界条件不全是第一类的，本节的方法仍然适用，不同的只是函数 $W(x,t)$ 的形式吧了. 我们就下列几种第一、二类边界条件的情况写出相应的一种 $W(x,t)$的表达式:

(1) $u(0,t)=\mu(t),\ u_x(l,t)=\nu(t),\ W(x,t)=\dfrac{\nu(t)-\mu(t)}{2l}x^2+\mu(t)(1+x)$

(2) $u_x(0,t)=\mu(t), u(l,t)=\nu(t)$,

$$W(x,t)=\frac{\nu(t)-\mu(t)}{2l}(x-l)^2+\nu(t)[1+(x-l)]$$

(3) $u_x(0,t)=\mu(t), u_x(l,t)=\nu(t)$,

$$W(x,t)=\frac{\nu(t)-\mu(t)}{2l}x^2+\mu(t)\cdot x$$

上述弦振动方程边界条件齐次化方法，完全可以应用于热传导方程上，建议读者自己练习。

综合本章前面各节所述分离变量法，得出求解定解问题的主要步骤如下：

第一，根据边界条件的形状选择适当坐标系，以使边界条件方程最为简单。如圆、圆环、扇形等域用极坐标系，圆柱形域用柱面坐标系，球域用球面坐标系较为方便。

第二、对于边界条件是非齐次的，又没有其它条件可以用来求解固有值问题时，不论方程是否齐次，都必须作替换化为齐次边界条件的问题，然后再求解。

第三、非齐次方程，齐次边界条件下的定解问题，不论初始条件如何？都用试探法求解。对非齐次边界条件，先用替换法化为齐次边界条件的定解问题，再用试探法求解。

§2-8* 第三类边界条件下的热传导方程

设有一长度为 l 的均匀细杆，共侧面是绝热的，杆的左端点 $x=0$ 处温度保持零度，右端点 $x=l$ 处热量自由辐射到周围温度是零的介质中，已知初始温度分布为 $\varphi(x)$。试求杆上的温度变化规律。此时就是要求解下列定解问题：

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, 0<x<l, 0<t & (2.8.1)\\ u(x,0)=\varphi(x) & (2.8.2)\\ u(0,t)=0,\quad u_x(l,t)+hu(l,t)=0,\quad h>0 & (2.8.3)\end{cases}$$

我们仍用分离变量法来求解这个问题．设

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

把它代入到方程(2.8.1)中，得出

$$XT'=a^2X''T \quad 或 \quad \frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2,\ \lambda>0$$

从而得出两个常微分方程

$$\begin{cases} T'+a^2\lambda^2T=0 \\ X''+\lambda^2X=0 \end{cases} \tag{2.8.4}$$

解(2.8.4)中第一个方程，得出

$$T(t)=Ce^{-a^2\lambda^2t} \tag{2.8.5}$$

$C(\neq 0)$是任意常数．由(2.8.3)式得出 $X(x)$的边界条件为

$$X(0)=0,\ X'(l)+hX(l)=0$$

因此就需要解下述固有值问题

$$\begin{cases} X''+\lambda^2X=0 \\ X(0)=0,\ X'(l)+hX(l)=0 \end{cases} \tag{2.8.6}$$

(2.8.6)中微分方程的解为

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$$

由 $X(0)=0$ 定出 $A=0$，所以

$$X(x)=B\sin\lambda x \tag{2.8.7}$$

从 $X'(l)+hX(l)=0$ 得出

$$h\sin\lambda l+\sqrt{\lambda}\cos\lambda l=0,\ 当\ B\neq 0$$

该方程可重新改写为

$$\operatorname{tg}\alpha=-a\alpha \tag{2.8.8}$$

其中 $\alpha=\lambda l$、$a=1/hl$．解固有值问题(2.8.6)就变成为要求方程(2.8.8)的根 α．

方程(2.8.8) 的根可以看作是曲线 $\xi=\operatorname{tg}\alpha$ 与直线 $\xi=-a\alpha$ 交点的横坐标(图 2-5)，显然它们的交点有无穷多个，于是方程(2.8.8)有无穷多个根，设(2.8.8)的无穷多个正根为

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots$$

由这些根可以确定出固有值为

$$\frac{\alpha_1}{l},\ \frac{\alpha_2}{l},\ \cdots,\ \frac{\alpha_n}{l},\ \cdots,\ (\lambda_n=\alpha_n/l)$$

相应的固有函数为

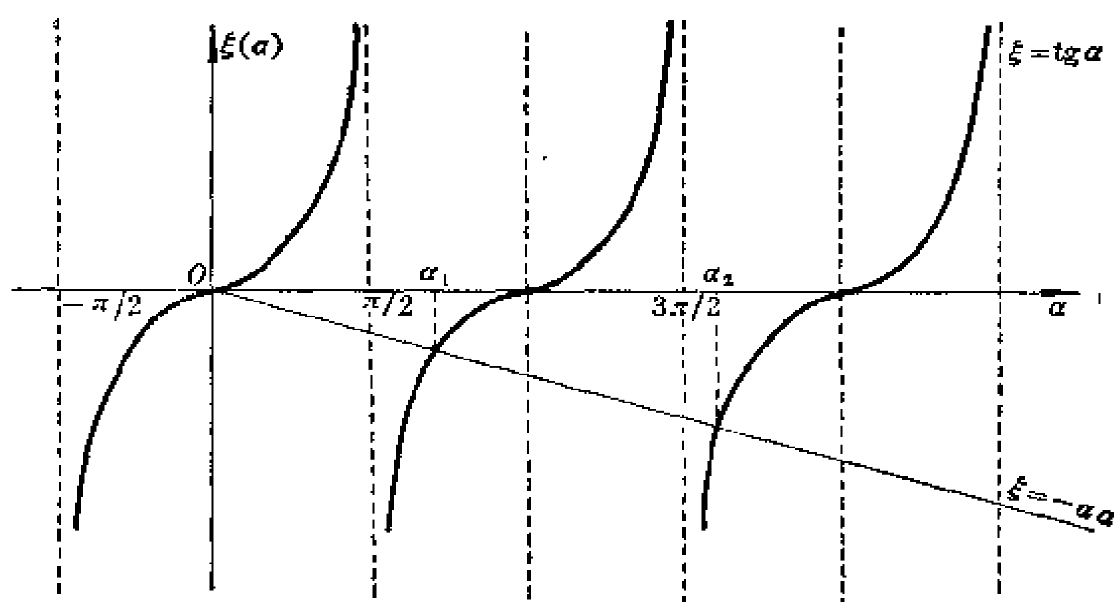


图 2-5

$$X_n(x)=B_n\sin\lambda_n X,\ n=1,2,3,\cdots \tag{2.8.9}$$

再从(2.8.5)得出

$$T_n(t)=C_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \tag{2.8.10}$$

因此，由(2.8.9)，(2.8.10)得出方程(2.8.1)满足边界条件(2.8.3)的一组特解

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x,\ n=1,2,3,\cdots$$

其中 $a_n=B_nC_n$ 是一组常数. 由于方程(2.8.1)与边界条件(2.8.3)都是线性齐次的，所以，如果级数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x \tag{2.8.11}$$

对 x 与 t 收敛，并且对 x 逐项两次可微、对 t 逐项一次可微，那末(2.8.11)所确定的 $u(x,t)$ 必能满足方程及边界条件. 最后还要求 $u(x,t)$满足初始条件(2.8.2)，即

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\lambda_n x \tag{2.8.12}$$

这里想要确定系数 a_n 就变为：在[0, l]上定义的函数 $\varphi(x)$展开为级数的问题. 至于展开为级数的问题，只要 $\varphi(x)$在[0, l] 上满足狄利克莱条件就足够了，剩下来的是确定展开系数 a_n. 为此，需要利用三角函数系 $\{\sin\lambda_n x\}$

在 $[0,l]$ 上的正交性[附录 III]:

$$\int_0^l \sin\lambda_m x\cdot\sin\lambda_n x dx=0,\ m\neq n$$

于是把 (2.8.12) 的两端乘上 $\sin\lambda_m x$, 然后在 $[0,l]$ 上积分, 得出

$$a_n=\frac{1}{L_n}\int_0^l\varphi(x)\sin\lambda_n x dx,\ L_n=\int_0^l\sin^2\lambda_n x dx=\frac{l}{2}\left(1-\frac{1}{2\alpha_n}\sin 2\alpha_n\right) \tag{2.8.13}$$

最后, 把(2.8.13)式代入(2.8.11)式中即得出原定解问题的解.

综合本节的讨论可以看出, 用分离变量法解第三类边界条件的定解问题时, 只要边界条件都是齐次的, 其解法与解第一类边界条件的定解问题是相同的, 但在确定固有值 λ_n 时, 解(2.8.8)式是比较复杂的. 在具体求解方程 (2.8.8)式的根时, 常采用二分法, 迭代法, 牛顿法, 等①, 工程技术中也采用图解法(或作图法), 定出固有值 λ_n 的近似值.

§2-9* 圆形薄膜的横向振动方程

设有一半径为 1 的弹性圆形薄膜, 边界固定, 膜作横向振动时, 位移 u 关于 θ 是对称的, 初始位移是已知函数 $\varphi(r)$, 初始速度为零. 试求圆形薄膜的横向振动规律, 此时就是要求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r\right),\ 0<r<1,\ 0<t & (2.9.1)\\ u(r,0)=\varphi(r),\ u_t(r,0)=0 & (2.9.2)\\ u(1,t)=0 & (2.9.3)\end{cases}$$

此外还附有自然的边界条件

$$\lim_{r\to0}u(r,t)<+\infty \tag{2.9.4}$$

用分离变量法, 设

$$u(r,t)=R(r)T(t)$$

代入方程(2.9.1)得出

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{R''+\dfrac{1}{r}R'}{R}=-\lambda^2$$

其中 $\lambda>0$ 是一常数. 在 λ^2 前取负号是为了能得到关于时间 t 的周期解. 因此, 我们有

① 华中工学院,《工程数学: 算法语言 · 计算方法》, 人民教育出版社, 1979 年.

$$T''+\lambda^2a^2T=0 \tag{2.9.5}$$

$$rR''+R'+\lambda^2rR=0 \tag{2.9.6}$$

方程(2.9.5)的解为

$$T(t)=A\cos\lambda at+B\sin\lambda at \tag{2.9.7}$$

从边界条件(2.9.3)与(2.9.4)，有 $R(1)=0$ 与 $\lim\limits_{r\to0}R(r)<+\infty$，因而有**斯图姆-刘维尔(Sturm-Liouville)固有值问题**

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)+\lambda^2rR=0\\ R(1)=0,\ \lim\limits_{r\to0}R(r)<+\infty\end{cases} \tag{2.9.8}$$

(2.9.8)中方程是零阶**贝塞耳(Bessel)方程**，它的解可表示为①

$$R(r)=CJ_0(\lambda r)+DY_0(\lambda r) \tag{2.9.9}$$

其中 J_0，Y_0 分别是第一类，第二类零阶的**贝塞耳函数**．因为 $Y_0(\lambda r)\to-\infty$ $(r\to0)$，由条件 $\lim\limits_{r\to0}R(r)<+\infty$ 应有 $D=0$．从而

$$R(r)=CJ_0(\lambda r) \tag{2.9.10}$$

由条件 $R(1)=0$ 得出

$$J_0(\lambda)=0 \tag{2.9.11}$$

这是一个**超越方程**，它有无穷多个正的零点，即使 $J(\lambda_n)=0$ 成立的 λ_n：

$$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots<\lambda_n<\cdots. \tag{2.9.12}$$

它就是所求的固有值，相应的

$$J_0(\lambda_1r),J_0(\lambda_2r),J_0(\lambda_3r),\cdots,J_0(\lambda_nr),\cdots \tag{2.9.13}$$

就是固有函数．

用 λ_n 代入(2.9.7)与(2.9.10)中，则得出满足方程(2.9.1)与边界条件(2.9.3)、(2.9.4)的解为

$$u_n(r,t)=J_0(\lambda_nr)(a_n\cos\lambda_nat+b_n\sin\lambda_nat)$$

因为方程是线性齐次的，所以，如果级数

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}J_0(\lambda_nr)(a_n\cos\lambda_nat+b_n\sin\lambda_nat) \tag{2.9.14}$$

对 r 与 t 收敛，同时对 r 与 t 两次逐项可微，那末(2.9.14)也是方程的解，还

---

① 参考 K.S. 密勒著，工程问题中的偏微分方程，第五章，上海科学技术出版社，1959 年．

适合边界条件(2.9.3)与(2.9.4)。

要(2.9.14)适合初始条件(2.9.2)，即

$$\begin{cases} u(r,0)=\varphi(r)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nJ_0(\lambda_nr) \\ u_t(r,0)=0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n\lambda_na)J_0(\lambda_nr) \end{cases} \tag{2.9.15}$$

从后一式得出 $b_n=0$。假定 $\varphi(r)$ 在 $[0,1]$ 上是逐段光滑的函数。又因为 $\{J_0(\alpha_nr)\}$ 在 $[0,1]$ 上关于权函数 r 构成完全正交函数系，即

$$\int_0^1 rJ_0(\lambda_mr)J_0(\lambda_nr)dr=0,\ \text{当}\ m\neq n\ \text{时}$$

所以(2.9.15)中第一式就是函数 $\varphi(r)$ 展开为贝塞耳函数系 $\{J_0(\lambda_nr)\}$ 级数，其中 a_n 正是展开系数，应为

$$a_n=\int_0^1 r\varphi(r)J_0(\lambda_nr)dr\Big/\int_0^1 r[J_0(\lambda_nr)]^2dr \tag{2.9.16}$$

将 $b_n=0$ 与 (2.9.16) 代入(2.9.14)后，立即得到原问题的解的表达式

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 r\varphi(r)J_0(\lambda_nr)dr\Big/\int_0^1 r[J_0(\lambda_nr)]^2dr\right)J_0(\lambda_nr)\cos\lambda_nat \tag{2.9.17}$$

第二章　习　题

1　用分离变量法解齐次弦振动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的下述混合问题：当 $0<x<l,\ 0<t$ 时，

(1)　$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=x(l-x),\ u(0,t)=u(l,t)=0$

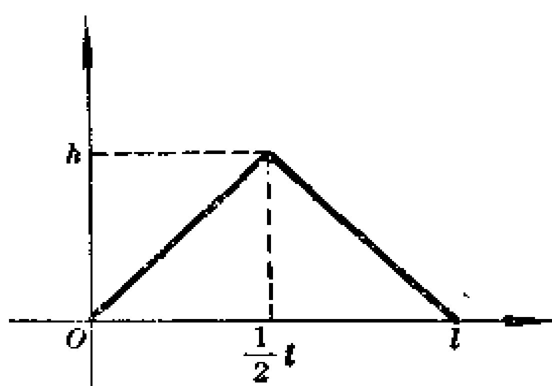
(2)　$u(x,0)=x^2-2lx,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=u_x(l,t)=0$

(3)　$u(x,0)=\sin\dfrac{3\pi x}{l},\ u_t(x,0)=x(l-x),\ u(0,t)=u(l,t)=0$

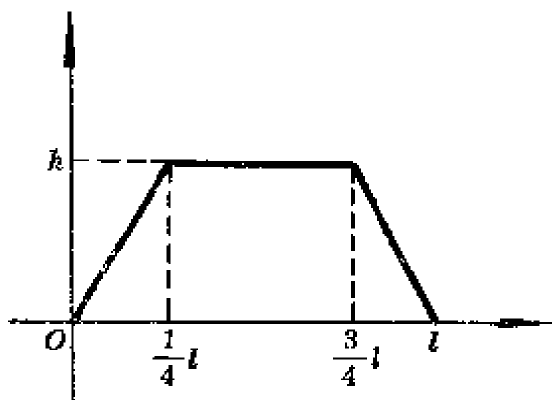
2　假设 $a=50,\ l=1$，试求齐次弦振动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的解，且要求满足下述定解条件为

$$u(x,0)=\begin{cases} x, & 0<x<\dfrac{1}{2} \\ 1-x, & \dfrac{1}{2}<x<1 \end{cases},\ u_t(x,0)=x(x-1),\ u(0,t)=u(1,t)=0$$

3　设有一自由振动弦，其初始位移为零，初始速度如图所示的函数，其中 h 是常数．试求解振动弦的偏位移．



第 3 题图



第 4 题图

4　设有一条长为 l 的自由振动弦，其两端固定，它的初始位移如第 3 题图，初始速度如下图所示，其中 h 是常数．试求解振动弦的偏位移．

5　用分离变量法解齐次弦振动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的下述混合问题：当 $0<x<1,\ 0<t$ 时，

(1)　$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=x^2,\ u(0,t)=u(1,t)=0$

(2)　$u(x,0)=x(1-x),\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=u(1,t)=0$

当 $0<x<\pi,\ 0<t$ 时，

(3)　$u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=x^2,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0$

(4)　$u(x,0)=x^3,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=0,\ u_x(\pi,t)=0$

6　解下述弦振动方程的定解问题：

(1)　$u_{tt}=a^2u_{xx}+b\,\mathrm{sh}\,x,\ u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=u(l,t)=0$

(2)　$u_{tt}=a^2u_{xx}+g$（常数），$u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=u_x(l,t)=0$

(3)　$u_{tt}=a^2u_{xx}+A\sin x,\ u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=B,\ u(l,t)=C$

(4)　$u_{tt}=a^2u_{xx}-\ln(1+x),\ u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$

其中 a、b、l、A、B、C 均为常数．

7　设弹簧一端固定、另一端在外力作用下作周期振动，此时定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ 0<t \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=A\sin\omega t \end{cases}$$

试求解 $u(x,t)$．其中 $\dfrac{\omega l}{\pi a}$ 不为正整数，a、l、ω 均为常数．

8　确定下列定解问题的解:

(1) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+A\operatorname{sh}x,\ 0<x<l,\ 0<t \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=h,\ u(l,t)=k \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+Ax,\ 0<x<1,\ 0<t \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$

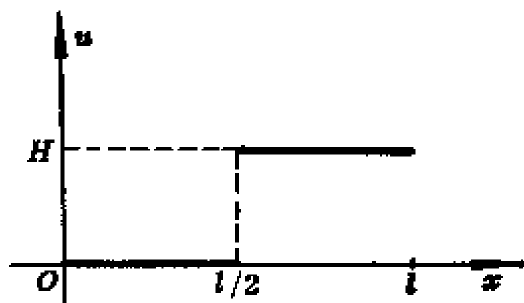
其中 A、h、k 均为常数.

(3) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+x^2,\ 0<x<1,\ 0<t \\ u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=1 \end{cases}$

9　解出一维齐次热传导方程, 定解条件为 $u(x,0)=x(l-x)$, $u(0,t)=u(l,t)=0$.

10　解出一维齐次热传导方程, 定解条件为 $u(x,0)=x$, $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$.

11　一长度为 l 的杆, 其初始温度分布如图所示, 由 $t=0$ 时开始杆的两端温度保持零度, 试求杆上温度分布 $u(x,t)$.



第 11 题图

12　试求解定解问题

$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ 0<t \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(x) \end{cases}$

其中 $\varphi(x)$、$\mu_1(t)$、$\mu_2(t)$ 均为已知函数, H 为常数.

13　解出下述定解问题的解:

(1) $\begin{cases} u_t=4u_{xx},\ 0<x<1,\ 0<t, \\ u(x,0)=x^2(1-x) \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} u_t=ku_{xx},\ 0<x<\pi,\ 0<t \\ u(x,0)=\sin^2 x \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$

14　解出具有放射衰变的热传导方程的定解问题:

(1) $\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+Ae^{-\alpha x},\ 0<x<l,\ 0<t \\ u(x,0)=T \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + Ae^{-\alpha x}, 0<x<\pi, 0<t \\ u(x,0) = \sin x \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$

其中 $\alpha>0$、A, T 均为常数。

15　确定下述定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} - hu, \ -\pi<x<\pi, 0<t \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t), u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t) \end{cases}$$

16　解出下列定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0<x<l, 0<t \\ u(x,0) = g(x), \\ u(0,t) = u_1, u(l,t) = u_2 \end{cases}$$

其中 u_1, u_2 为常数。又当 $g(x)$, u_1, u_2 都取零时，解如何？

17　试确定下列定解问题的解的一般表达式：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0<x<l, 0<t \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

其中 f、μ_1、μ_2 均为已知函数。

18　一根长为 l 的细杆表面绝热，初始温度分布如第四题图所示，由 $t=0$ 时开始两端温度保持零度，试求杆上温度分布 $u(x,t)$。

19　求满足下列定解条件的一维齐次热传导方程的解：$u(x,0)=kx$（k 为常数），$u(0,t)=10$, $u(l,t)=5$。

20　在矩形域 $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$ 上求拉普拉斯方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 满足下述边界条件的解：

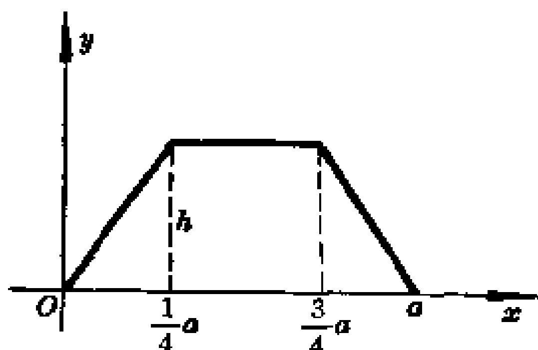
(1) $u(0,y)=Ay(b-y)$, $u(a,y)=0$, $u(x,0)=B\sin\dfrac{\pi x}{a}$, $u(x,b)=0$

(2) $u(0,y)=Ay(b-y)$, $u(a,y)=0$, $u(x,0)=B\cos\dfrac{\pi x}{2a}$, $u(x,b)=0$

(3) $u(0,y)=0$, $u(a,y)=Ay$, $u_y(x,0)=0$, $u_y(x,b)=0$

其中 A、B 均为常数。

21　一矩形平板，沿 x 轴一边的温度分布如图所示，其余三边皆为零，试求其上稳恒状态下的温度分布。这里 h 为常数。



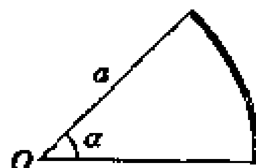
第 21 题图

22　一矩形平板，沿 x 轴的一边长为 a，沿 y 轴的一边长为 b．$x=0$ 与 $x=a$ 的两边绝热，$y=0$ 的一边保持常温 T，$y=b$ 的一边温度保持零度．试求平板的稳恒温度分布．设板的上、下侧面均绝热．

23　试求解半径为 a 而中心在坐标原点的圆域外部的拉普拉斯方程的狄利克莱问题．

24　试求一个函数 u，在半径为 a 的圆的内部是满足拉普拉斯方程，而在圆周 Γ 上满足边界条件：(1)　$u|_\Gamma=A\cos\theta$，(2)　$u|_\Gamma=A+B\sin\theta$．其中 A、B 均为常数．

25　试求一个函数 u，使得它在扇形内部是满足拉普拉斯方程，而在边界上满足条件 $u|_{\theta=0}=0$，$u|_{\theta=\alpha}=0$，$u|_{\rho=a}=f(\theta)$　$(0<\theta<\alpha)$，如图所示．其中 α、a 均为常数．



第 25 题图

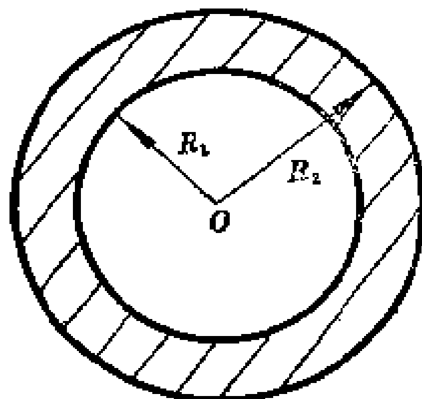
26　试用分离变量法解出圆内部的牛曼问题：

$$\Delta u=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=f(\theta),\ -\pi<\theta<\pi$$

此处已知函数 $f(\theta)$ 适合条件

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta=0$$

27　设有一个薄而长的圆柱面，被微小的间隙分成两半．上半片的电位为 V_0＝常数，下半片的电位为零，试求圆柱面内的电位分布．



第28 题图

28　在两个以原点为中心，半径分别是 R_1 与 R_2 的同心圆所围成的环状区域内，试求解拉普拉斯方程的狄利克莱问题．$R_1<R_2$，如图所示．又如果

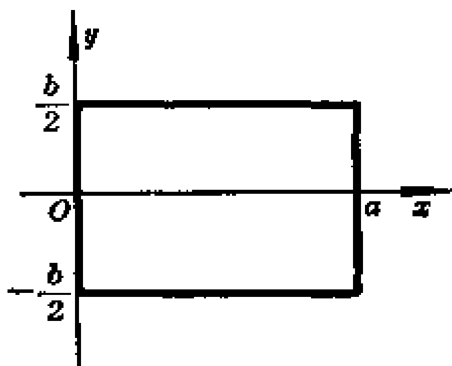
当 $R_1 \to 0$ 时，环状区域退化为圆形区域后的极限情况如何？

29　在第 28 题图的环形区域内，求解拉普拉斯方程，使其满足边界条件：$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R_1}=f_1(\theta)$，$u|_{\rho=R_2}=f_2(\theta)$，$-\pi<\theta<\pi$。其中 $f_1(\theta)$、$f_2(\theta)$ 均为已知函数。

30　求泊松方程的狄利克莱问题

$$\begin{cases}\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=-2, \text{在区域 } \Omega \text{ 内}\\ u|_{\Gamma}=0\end{cases}$$

的解，其中边界 Γ 如图所示。



第 30 题图

31　在以原点为中心，R 为半径的圆内，试求解泊松方程的狄利克莱问题：

$$\begin{cases}\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=-xy, \text{在圆内}\\ u|_{\rho=R}=0\end{cases}$$

的解。

32*　半径为 R 的均匀圆形薄膜，固定于圆的边界上，如果在开始时它的形状是旋转抛物面，而且初速度为零。试求它的振动规律。

33*　有一个底面半径为 R 而高为 h 的圆柱体，在下底和侧表面上保持定常温度 0°。而上底上的温度分布情况是一个已知的 r 的函数。求柱体内部各点的定常温度分布。

附　　录

I　二阶常微分方程的初始值问题(或柯西问题)

设有

$$\ddot{T}_n(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t) \tag{1.1}$$

$$T_n(0)=\varphi_n,\quad \dot{T}_n(0)=\psi_n \tag{1.2}$$

显然可以看出，初始值问题(1.1)与(1.2)的解可由下述初始值问题

$$\ddot{T}_n(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=0 \tag{1.3}$$

$$T_n(0)=\varphi_n,\quad \dot{T}_n(0)=\psi_n \tag{1.4}$$

与

$$\begin{cases}\ddot{T}_n(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t) & (1.5)\\ T_n(0)=0,\quad \dot{T}_n(0)=0 & (1.6)\end{cases}$$

的解相加而得出.

由于(1.3)是常系数的常微分方程,所以容易得出初始值问题(1.3)与(1.4)的解为

$$T_n(t)=\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l} \tag{1.7}$$

现在我们用参数变易法求解常系数非齐次微分方程的初始值问题(1.5)与(1.6)的解. 设(1.5)具有如下式

$$T_n(t)=C_1(t)\cos\frac{n\pi at}{l}+C_2(t)\sin\frac{n\pi at}{l} \tag{1.8}$$

的解,其中 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 是待定函数. 我们发现,把(1.8)式代入(1.5)中后,取 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 为同时适合方程组:

$$\begin{cases}C_1'(t)\cos\frac{n\pi at}{l}+C_2'(t)\sin\frac{n\pi at}{l}=0\\ -C_1'(t)\sin\frac{n\pi at}{l}+C_2'(t)\cos\frac{n\pi at}{l}=\frac{l}{n\pi a}f_n(t)\end{cases} \tag{1.9}$$

时,则由此确定出的 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 代入(1.8)后,所得到的 $T_n(t)$ 必定适合方程(1.5),亦即是非齐次微分方程(1.5)的解.

从方程组(1.9)解出

$$C_1'(t)=\frac{-l}{n\pi a}f_n(t)\sin\frac{n\pi at}{l},$$

$$C_2'(t)=\frac{l}{n\pi a}f_n(t)\cos\frac{n\pi at}{l}$$

把此二式从 0 到 t 积分后,则得出

$$C_1(t)=C_1^0-\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a\tau}{l}d\tau,$$

$$C_2(t)=C_2^0+\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{n\pi a\tau}{l}d\tau$$

其中 C_1^0 与 C_2^0 是积分常数．于是由(1.8)得出方程 (1.5) 的通解为

$$T_n(t)=\left\{C_1^0\cos\frac{n\pi at}{l}+C_2^0\sin\frac{n\pi at}{l}\right\}$$

$$+\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau \qquad (1.10)$$

我们令(1.10)中的 $T_n(t)$适合初始条件(1.6),即

$$T_n(0)=C_1^0=0,$$

$$\dot{T}_n(0)=\left[\frac{n\pi a}{l}C_2^0\right]=0$$

所以必须 $C_1^0=C_2^0=0$, 由此得出初始值问题 (1.5) 与 (1.6) 的解为

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau \qquad (1.11)$$

总之,我们得出初始值问题(1.1)与(1.2)的解为

$$T_n(t)=\left\{\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right\}$$

$$+\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau \qquad (1.12)$$

II　一阶常微分方程的初始值问题(或柯西问题)

设有

$$\begin{cases}\dot{T}_n(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t) & (2.1)\\ T_n(0)=\varphi_n & (2.2)\end{cases}$$

利用常系数的常微分方程的解法,可得出微分方程(2.1)的通

解应为

$$T_n(t)=e^{-\int_0^t\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 d\tau}\left\{\int_0^t f_n(\tau)e^{\int_0^\tau\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 d\xi}d\tau+C\right\}$$

(2.3)

其中C为积分常数. 再利用初始条件(2.2)代入(2.3)中, 则得出$C=\varphi_n$. 从而得出问题(2.1)与(2.2)的解应为

$$T_n(t)=e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\cdot t}\left\{\int_0^t f_n(t)e^{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\tau}d\tau+\varphi_n\right\}$$

$$=\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\cdot(t-\tau)}d\tau$$

$$+\varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\cdot t} \qquad (2.4)$$

此处(2.4)即为问题(2.1)与(2.2)的解.

III　固有函数系$\{\sin\lambda_n x\}$的正交性

设固有值问题(2.8.6)的两个不同的固有值λ_m,λ_n,与其相应的固有函数为$X_m(x)=\sin\lambda_m x$, $X_n(x)=\sin\lambda_n x$, 此时有

$$X''_m(x)+\lambda_m^2X_m(x)=0,$$

$$X''_n(x)+\lambda_n^2X_n(x)=0$$

把上述第一式乘以$X_n(x)$, 第二式乘以$X_m(x)$, 由所得到的方程逐次相减, 再沿区间$[0,l]$上积分, 得出

$$\int_0^l[X''_m(x)X_n(x)-X''_n(x)X_m(x)]dx$$

$$+(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\int_0^l X_m(x)X_n(x)dx=0$$

用分部积分法于上式第一个积分, 就得到

$$X'_m(l)X_n(l)-X'_n(l)X_m(l)+X'_n(0)X_m(0)$$

$$-X'_m(0)X_n(0)+(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\int_0^l X_m(x)X_n(x)dx=0$$

由于$X_m(0)=X_n(0)=0$, $X'_m(l)=-hX_m(l)$, $X'_n(l)=-hX_n(l)$,

故上式除积分以外的项均为零，又由于 $\lambda_m \neq \lambda_n$，得出

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)dx = 0$$

此即固有函数系$\{\sin\lambda_n x\}$是正交的。

第三章　积分变换法

前一章讨论的分离变量法，是求解三种典型偏微分方程的最常用方法之一，只要区域比较规则均可采用。假若考虑的是无限区域，就没有边界条件，分离变量法做不下去。本章介绍另一种基本方法——积分变换法，就弥补了这个不足之处。这种方法与分离变量法一样，能把偏微分方程化为常微分方程。

积分变换法分付里叶变换法与拉普拉斯变换法。本章首先从付里叶级数出发，引入付里叶积分和付里叶变换，再讨论付里叶变换应用。然后，引进拉普拉斯变换，同样地再讨论拉普拉斯变换的应用。

§3-1　付里叶积分和付里叶变换

1　热传导方程的初始值问题

到目前为止，热传导方程定解问题的讨论仍然局限在有限范围内。有时也需要我们讨论无穷范围的热量传播问题。这时在初始状态 $\varphi(x)$的影响下，热量传播的定解问题是初始值问题（或柯西问题）：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t & (3.1.1) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (3.1.2) \end{cases}$$

(3.1.1)，(3.1.2)就是无界的热传导的定解问题。下面讨论定解问题(3.1.1)，(3.1.2)的求解方法。

若把定解问题(3.1.1)，(3.1.2)与第二章§2-2的定解问题

比较一下，可以看出它们之间的差别在于：一是自变量 x 的变化范围不同，这里 x 是在无穷范围 $-\infty<x<+\infty$ 上变化，而第二章 §2-2 中 x 是在有限范围 $0<x<l$ 上变化；二是这里没有边界条件了，而在第二章 §2-2中仍然有边界条件．正是由于这些差异的出现，求解初值问题(3.1.1)，(3.1.2)时，分离变量法已经不成功了，必须将这个方法作适当修改，才能发挥它的巨大作用．首先讨论一下究竟怎样修改这个方法，然后再利用它去求出问题(3.1.1)，(3.1.2)的解的表达式．

类似于分离变量法，令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，将它代入方程(3.1.1)中，得出两个常微分方程（这里我们记 $\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2$，其中 λ 是待定常数）

$$\begin{cases}T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0 & (3.1.3)\\ X''(x)+\lambda^2X(x)=0 & (3.1.4)\end{cases}$$

由此便得出其解为

$$\begin{cases}T(t)=Ce^{-a^2\lambda^2t} & (3.1.5)\\ X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x & (3.1.6)\end{cases}$$

其中 A,B,C 都是任意常数．回顾从前，到了这里就用一个固有值问题决定 λ，从而得出固有值 λ_n 和固有函数 $\varphi_n(x)$，问题就急转直下，付里叶级数起了巨大作用．可是，现在没有边界条件，λ 就无法确定了．

十分明显，如果把(3.1.5)与(3.1.6)的函数 $T(t)$ 与 $X(x)$ 相乘起来，其中任意常数仍然记为 A,B，那末得出

$$u(x,t)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)e^{-a^2\lambda^2t} \qquad (3.1.7)$$

它应该适合方程(3.1.1)，这里 λ 是任意常数．很显然，只要 A,B 与 λ 的取值与 x，t 无关，(3.1.7)式中的 $u(x,t)$ 仍然是适合方程(3.1.1)．因此，若取 A 与 B 是 λ 的函数，即 $A=A(\lambda)$，$B=B(\lambda)$，

那么(3.1.7)式应为

$$u(x,t)=[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]e^{-a^2\lambda^2 t} \tag{3.1.8}$$

这样得出的(3.1.8)式也必然适合方程(3.1.1)。进一步，由于方程(3.1.1)是线性齐次的，很容易证明：如果含有参变量 x 与 t 的旁义积分

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda \tag{3.1.9}$$

对 x 与 t 是收敛的，并且对 x 可二次逐项微分，对 t 可一次逐项微分，则它必然是适合方程(3.1.1)的。同时，只要适当选择 $A(\lambda)$，$B(\lambda)$，就有可能使得 (3.1.9) 式中的 $u(x,t)$能够适合初始条件(3.1.2)。那么，究竟应该怎样去选择呢？对于这个问题，付里叶级数再也不能起什么作用了，因此就必需把付里叶级数进行新的推广，以便于适应当前的需要。下面，我们先建立付里叶积分和付里叶变换。

2 从付里叶级数到付里叶积分 付里叶变换

设 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数，它在任一有限区间$[-l,l]$上分段光滑(即导数只有第一类不连续点)，则函数 $f(x)$可以展开为付里叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{3.1.10}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi,$$

$$(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$(n=1,2,\cdots) \tag{3.1.11}$$

如果把 a_n, b_n 代入表达式(3.1.10)中，那末得出

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}(x-\xi)d\xi \tag{3.1.12}$$

现在我们设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为绝对可积（所谓绝对可积，即$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$存在，并且可知 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 存在，所以 $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=0$)。如记 $\lambda_1=\frac{\pi}{l}$，$\lambda_2=\frac{2\pi}{l}$，$\cdots$，$\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$，$\cdots$，$\Delta\lambda_n=\lambda_{n+1}-\lambda_n=\frac{\pi}{l}$，因而(3.1.12)式可写成为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n\left\{\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\lambda_n(x-\xi)d\xi\right\}$$

令 $l\to\infty$，上式积分的极限可写成为

$$f(x)=\lim_{\Delta\lambda_n\to 0}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n\left\{\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\lambda_n(x-\xi)d\xi\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi \tag{3.1.13}$$

我们把积分表达式(3.1.13)式称为付里叶积分。可以证明如果 $f(x)$绝对可积，那末在 $f(x)$本身及其导数连续的点上，它的付里叶积分必定收敛于 $f(x)$在该点的函数值。

(3.1.13)式可以写成为

$$f(x)=\int_0^{+\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda \qquad (3.1.14)$$

其中

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi,\qquad B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi \qquad (3.1.15)$$

如果利用 $\cos\lambda(x-\xi)$ 是 λ 的偶函数，$\sin\lambda(x-\xi)$是 λ 的奇函数，也可以把(3.1.13)写成为复数形式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)[\cos\lambda(x-\xi)-i\sin\lambda(x-\xi)]d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda(x-\xi)}d\xi \qquad (3.1.16)$$

如果引进新的函数

$$G(\lambda)=F[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi \qquad (3.1.17)$$

由(3.1.16)便得出

$$f(x)=F^{-1}[G(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda \qquad (3.1.18)$$

我们把(3.1.17)中的函数$F(\lambda)$称为 $f(x)$的**付里叶变换**，同时把(3.1.18)式中 $f(x)$称为$G(\lambda)$的**付里叶逆变换**。**显然**，从刚才讨论中可以看出，如果 $f(x)$ 是分段光滑并且在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，那末它的付里叶变换存在，而且此变换的逆变换也存在且等于 $f(x)$。

有了付里叶积分和付里叶变换这一定义之后，就可以利用它们求解数学物理方程中的若干定解问题，这里主要是求解热传导方程及波动方程的若干定解问题。在求解的运算过程中，需要用

到付里叶变换的许多重要性质，为了便于帮助我们正确地掌握和应用这些重要性质，因而把它们列在附录 I 中是十分必要的.

3 热传导方程初始值问题的解

从本节开头的讨论已经得出了方程(3.1.1)的解可以用积分

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda \tag{3.1.9}$$

表示. 显然，如果(3.1.9)式中的 $u(x,t)$ 能够适合初始条件(3.1.2)，即

$$u(x,0)=\varphi(x)=\int_0^{+\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda \tag{3.1.19}$$

成立，从付里叶积分表达式 (3.1.14) 就知道，(3.1.19)式中的 $A(\lambda)$，$B(\lambda)$ 应该由(3.1.15)表示出来，亦即

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi, \quad B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi \tag{3.1.20}$$

把此式代入(3.1.9)中，得出

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(x-\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}d\xi \tag{3.1.21}$$

必然为初值问题(3.1.1)，(3.1.2)的解. 要证实这一点只需代入验证即可，而要保证验证手续的合理性，只要 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有有限个第一类的间断点且分段连续就足够了.

4 无穷直线上的点源函数

我们要把所得到的解的积分表达式化得简单一些. 为此先交

换积分(3.1.21)的次序，即

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left[\int_{0}^{+\infty}\cos\lambda(x-\xi)e^{-a^2\lambda^2t}d\lambda\right]d\xi \tag{3.1.22}$$

如令

$$\int_{0}^{+\infty}\cos\lambda(x-\xi)e^{-a^2\lambda^2t}d\lambda=I(x,\xi,t) \tag{3.1.23}$$

具体地计算出来[附录 II]，有

$$I(x,\xi,t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \tag{3.1.24}$$

再把它代入(3.1.22)式中，初值问题(3.1.1)、(3.1.2)的解可表示为**泊松积分**

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi \tag{3.1.25}$$

我们亦可将它表示为

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \tag{3.1.26}$$

其中函数

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \tag{3.1.27}$$

称为**无穷直线上的点源函数**．这是因为在初始时刻 $t=0$ 时，在点 ξ 处放了热量为 $Q=c\rho$ 的热源，那末函数

$$G(x,\xi,t)=\frac{Q}{c\rho 2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \tag{3.1.27'}$$

就是在点 x 处于时刻 t 时杆上的温度，或者说，它就是杆上的温度分布状态．要相信这一事实的真实性，从下述二点即可得到说明：(1)利用它对变量 x，t 微分可验证 $G(x,\xi,t)$ 适合热传导方程(3.1.1)．事实上，

$$G_x = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{(x-\xi)}{2[a^2 t]^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

$$G_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(a^2 t)^{3/2}} + \frac{(x-\xi)^2}{4(a^2 t)^{5/2}}\right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

$$G_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[-\frac{a^2}{2(a^2 t)^{3/2}} + \frac{a^2(x-\xi)^2}{4(a^2 t)^{5/2}}\right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

于是有 $G_t = a^2 G_{xx}$ 成立. (2)当时刻 $t>0$ 时，杆上所有的热量的总和应为

$$\begin{aligned} & c\rho\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)dx \\ & = \frac{Q}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{dx}{2a\sqrt{t}} \\ & = \frac{Q}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \\ & = \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = Q = c\rho \end{aligned}$$

这里 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}$, $\alpha = \frac{(x-\xi)}{2a\sqrt{t}}$, $d\alpha = \frac{dx}{2a\sqrt{t}}$.

正因为(1)的缘故，所以我们把(3.1.27)式中的函数 $G(x,\xi,t)$ 称为热传导方程的**基本解**.

例 设初始函数 $\varphi(x)$ 为

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ A(\text{常数}), & x>0 \end{cases} \tag{3.1.28}$$

则由(3.1.25)式得出解为

$$u(x,t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}$$

令 $\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}=z,\ \frac{-d\xi}{2a\sqrt{t}}=dz$，上式成为

$$
\begin{aligned}
u(x,t)&=\frac{A}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-z^2}dz\\
&=\frac{A}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{-z^2}dz+\int_{0}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-z^2}dz\right\}\\
&=\frac{A}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}\\
&=\frac{A}{2}\left\{1+\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\} \qquad (3.1.29)
\end{aligned}
$$

这里因

$$\int_{-\infty}^{0}e^{-z^2}dz=\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

而

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-z^2}dz \qquad (3.1.30)$$

称为**概率积分**，或**误差积分**，其值可查表得出.

§3-2 付里叶变换应用

1 热传导方程(有热源存在)的初始值问题

为了说明怎样利用付里叶变换及其逆变换解初始问题的精神实质与步骤，下面讨论均匀杆内部有热源存在的热量传播问题，就是解非齐次热传导方程的初始值问题：

$$
\begin{cases}
u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\ -\infty<x<+\infty,\ 0<t & (3.2.1)\\
u(x,0)=\varphi(x) & (3.2.2)
\end{cases}
$$

这里 $\varphi(x)$，$f(x,t)$ 皆为已知函数.

将 $u(x,t)$，$f(x,t)$ 和 $\varphi(x)$ 关于 x 进行付里叶变换，得出

$$\begin{cases} F[u(x,t)]=\tilde{u}(\lambda,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{i\lambda x}dx \\ F[f(x,t)]=\tilde{f}(\lambda,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)e^{i\lambda x}dx \\ F[\varphi(x)]=\tilde{\varphi}(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{i\lambda x}dx \end{cases} \tag{3.2.3}$$

再对方程(3.2.1)进行付里叶变换(3.1.17)，利用附录Ⅰ中付里叶变换性质1与4，得出

$$\frac{d\tilde{u}(\lambda,t)}{dt}=-a^2\lambda^2\tilde{u}(\lambda,t)+\tilde{f}(\lambda,t) \tag{3.2.4}$$

由(3.2.3)可知它应适合初始条件

$$\tilde{u}(\lambda,0)=\tilde{\varphi}(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,0)\,e^{i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{i\lambda x}dx \tag{3.2.5}$$

这样，我们就把偏微分方程初值问题(3.2.1)、(3.2.2)转化为常微分方程的初值问题(3.2.4)、(3.2.5)．按照常微分方程的解法(参考第二章附录II)，初值问题(3.2.4)、(3.2.5)的解应为

$$\tilde{u}(\lambda,t)=\tilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}+\int_0^t\tilde{f}(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}d\tau \tag{3.2.6}$$

于是利用$u(x,t)$的付里叶变换的逆变换到(3.2.6)上，得出初值问题(3.2.1)、(3.2.2)的解应为

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}(\lambda,t)e^{-i\lambda x}d\lambda \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda \\ &\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\tilde{f}(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}e^{-i\lambda x}d\lambda d\tau \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

简化解的表达式　点源函数　先看(3.2.7)式中的第一个积分．显然，我们可以把它视为两个变象函数乘积的逆付里叶变换，

分别求出了这两个变象函数的象原函数，利用附录 I 中付里叶变换的性质2，就可得出它的简化式．为此，计算出 $e^{-a^2\lambda^2 t}$ 的象原函数应为

$$F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a^2\lambda^2 t+i\lambda x)}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}(\cos\lambda x-i\sin\lambda x)d\lambda$$

由于 $e^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda x$ 为 λ 的奇函数，它的积分为零，故

$$F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

另外，从(3.2.5)可知 $F^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda)]=\varphi(x)$，于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}\cdot e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}d\xi \tag{3.2.8}$$

至于(3.2.7)式中第二个积分，经过交换积分次序后，得出

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\tilde{f}(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau \tag{3.2.9}$$

我们把(3.2.8)与(3.2.9)式代入(3.2.7)式后，得出解的最后表达式为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau$$

(3.2.10)

(3.2.10)式中的第一项与(3.1.25)完全相同，因此，它是由于均匀杆上的初始温度 $\varphi(x)$ 分布所产生的影响；第二项却是由于均匀杆上热源密度 $F(x,t)=c\rho f(x,t)$ 来确定。这样，我们看到，于任何时刻 t，在均匀杆上任意点 x 处的温度分布状态是由初始温度分布和热源密度分布所产生的影响来确定。

我们还可以把(3.2.10)式重新写成为

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (3.2.11)$$

这里

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \qquad (3.2.12)$$

称为**点源函数**，它是热传导方程的**基本解**。

如果均匀杆内部无热源存在，即 $f(x,t)\equiv 0$，那末(3.2.11)式中第二个积分恒为零，于是这时(3.2.10)式是(3.1.25)式。因此，本节所研究的一切完全适用于§3-1中的定解问题(3.1.1)，(3.1.2)。

2 强迫弦振动方程的初始值问题

考虑如下的强迫弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & -\infty<x<+\infty,\ 0<t \qquad (3.2.13)\\ u(x,0)=\varphi(x), & u_t(x,0)=\psi(x) \qquad (3.2.14)\end{cases}$$

容易验证(3.2.13)、(3.2.14)的解就是下述初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & -\infty<x<+\infty,\ 0<t \qquad (3.2.15)\\ u(x,0)=\varphi(x), & u_t(x,0)=\psi(x) \qquad (3.2.14)\end{cases}$$

与

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & -\infty<x<+\infty,\ 0<t \qquad (3.2.13)\\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=0 \qquad (3.2.16)\end{cases}$$

的解的叠加.

齐次方程问题(3.2.15)、(3.2.14)，对方程和初始条件关于 x 作付里叶变换，便得出下面的二阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\tilde{u}_{tt} = -\lambda^2 a^2 \tilde{u} & (3.2.17)\\ \tilde{u}(\lambda,0)=\tilde{\varphi}(\lambda),\ \tilde{u}_t(\lambda,0)=\tilde{\psi}(\lambda) & (3.2.18)\end{cases}$$

其中 $\tilde{u}(\lambda,t)=F[u(x,t)]$，$\tilde{\varphi}(\lambda)=F[\varphi(x)]$，$\tilde{\psi}(\lambda)=F[\psi(x)]$. 问题(3.2.17)，(3.2.18)是一个带参数 λ 的二阶常微分方程的初值问题，先求出(3.2.17)的通解为

$$\tilde{u}(\lambda,t)=C_1\cos\lambda at+C_2\sin\lambda at \qquad (3.2.19)$$

根据初始条件定出 $C_1=\tilde{\varphi}(\lambda)$，$C_2=\frac{1}{\lambda a}\tilde{\psi}(\lambda)$. 故得出问题(3.2.17)、(3.2.18)的解为

$$\tilde{u}(\lambda,t)=\tilde{\varphi}(\lambda)\cos\lambda at+\frac{1}{\lambda a}\tilde{\psi}(\lambda)\sin\lambda at \qquad (3.2.20)$$

在(3.2.20)的两端求关于 λ 的逆付里叶变换，左端即为 $u(x,t)$，而右端第一项的逆付里叶变换是

$$F^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda)\cos\lambda at]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)\cos\lambda at\,e^{-i\lambda x}d\lambda$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)[e^{i\lambda at}+e^{-i\lambda at}]e^{-i\lambda x}d\lambda$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)e^{-i\lambda(x-at)}d\lambda+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)e^{-i\lambda(x+at)}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)] \qquad (3.2.21)$$

第二项的逆付里叶变换为

$$F^{-1}\left[\frac{1}{\lambda a}\tilde{\psi}(\lambda)\sin\lambda at\right]=F^{-1}\left[\tilde{\psi}(\lambda)\frac{\sin\lambda at}{\lambda a}\right]$$

因为 $\frac{\sin\lambda at}{\lambda a}=\frac{1}{2a}\int_{-at}^{+at}e^{-i\lambda\beta}d\beta$，由此得出

$$F^{-1}\left[\frac{1}{\lambda a}\tilde{\psi}(\lambda)\sin\lambda at\right]=\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-at}^{+at}\tilde{\psi}(\lambda)e^{-i\lambda\beta}d\beta\right]e^{-i\lambda x}d\lambda$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\int_{-at}^{+at}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}(\lambda)e^{-i\lambda(x+\beta)}d\lambda d\beta=\frac{1}{2a}\int_{-at}^{+at}\psi(x+\beta)d\beta$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \qquad (3.2.22)$$

最后便得出问题(3.2.17),(3.2.18)的解为

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \qquad (3.2.23)$$

这个公式称为达朗倍尔公式.

非齐次方程问题(3.2.13)、(3.2.16) 对方程两端和初始条件关于 x 作付里叶变换,便得到下面的二阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\tilde{u}_{tt}=-a^2\lambda^2\tilde{u}+\tilde{f}(\lambda,t) & (3.2.24)\\ \tilde{u}(\lambda,0)=0,\ \tilde{u}_t(\lambda,0)=0 & (3.2.25)\end{cases}$$

其解为

$$\tilde{u}(\lambda,t)=\int_0^t\tilde{f}(\lambda,\tau)\frac{\sin\lambda a(t-\tau)}{\lambda a}d\tau \qquad (3.2.26)$$

在(3.2.26)式两端关于 λ 作逆付里叶变换,得出

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^t\tilde{f}(\lambda,\tau)\frac{\sin\lambda a(t-\tau)}{\lambda a}d\tau\right]e^{-i\lambda x}d\lambda$$

又因为 $\frac{\sin\lambda a(t-\tau)}{\lambda a}=\frac{1}{2a}\int_{-a(t-\tau)}^{+a(t-\tau)}e^{-i\lambda\beta}d\beta$, 由此得出

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-a(t-\tau)}^{+a(t-\tau)}\tilde{f}(\lambda,\tau)e^{-i\lambda(x+\beta)}d\beta d\lambda\right\}d\tau$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t\left\{\int_{-a(t-\tau)}^{+a(t-\tau)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\lambda,\tau)e^{-i\lambda(x+\beta)}d\lambda\right]d\beta\right\}d\tau$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-a(t-\tau)}^{+a(t-\tau)}f(x+\beta,\tau)d\beta d\tau$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

故得出问题(3.2.13), (3.2.16)的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (3.2.27)$$

最后从(3.2.23), (3.2.27)得出问题(3.2.13), (3.2.14)的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right\}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (3.2.28)$$

总之,从以上过程可以看出,用付里叶变换法解定解问题的主要步骤如下:

第一,根据自变量的变化范围及定解条件的情况,对方程两端取变换,将方程中的两个自变量消去一个,从而把含有两个自变量的偏微分方程转化为含有一个参数的常微分方程.

第二,对定解条件取相应的变换,导出常微分方程的初始条件.

第三,解所得出的常微分方程的初始值问题,求得原定解问题解的变换式.

第四,对所得出的变换式取逆变换,得出原定解问题的形式解的表达式.

第五,将形式解的表达式简化即得出所求的显式解.

§3-3 拉普拉斯变换

前面利用付里叶变换求解偏微分方程时,会碰到许多困难.首先,能够进行付里叶变换的函数 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$ 上要绝对可积条件,如多项式,三角函数等大多数函数都不能满足这一条件.其次,根据付里叶变换的定义,必须要求函数定义在$(-\infty,\infty)$上,假

若要研究的是混合问题，而不是初始值问题，那么就不能对变量 x 进行付里叶变换了，于是转而设法对时间 t 进行变换，从而需要引入拉普拉斯变换.

设 $f(t)$ 为定义在 $t\geqslant 0$ 上的函数，定义

$$f_1(t)=\begin{cases} e^{-rt}f(t), & t\geqslant 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

并设 $f_1(t)$ 满足付里叶变换的条件，那么对 $f_1(t)$ 作付里叶变换，有

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\eta t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)e^{i\eta\xi}\,d\xi\right]d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\eta t}\left[\int_{0}^{+\infty}f_1(\xi)e^{i\eta\xi}d\xi\right]d\eta$$

用 $e^{-rt}f(t)$ 代替 $f_1(t)$，得出

$$f(t)=\frac{e^{rt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\eta t}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\xi)e^{-(r-i\eta)\xi}d\xi\right]d\eta, \qquad 0\leqslant t$$

令 $p=r-i\eta$,

$$F(p)=\int_{0}^{+\infty}f(\xi)e^{-p\xi}d\xi \tag{3.3.1}$$

注意 $dp=-i d\eta$，就得出

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}F(p)e^{pt}dp \tag{3.3.2}$$

(3.3.1)与(3.3.2)正好是一对互逆的变换式，称(3.3.1)式

$$F(p)=L[f(t)]=\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-pt}\,dt \tag{3.3.1}$$

为函数 $f(t)$ 的**拉普拉斯变换**. $F(p)$ 为**象函数**，$f(t)$ 为**象原函数**，p 为一复数. 称(3.3.2)为 $F(p)$ 的**拉普拉斯逆变换**，记为

$$f(t)=L^{-1}[F(p)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}F(p)e^{pt}dp \tag{3.3.2}$$

关于拉普拉斯变换及逆变换的计算，通常可按 (3.3.1)、

(3.3.2)进行，此处不讨论了. 为了解决求解问题的需要，我们在附录 IV 中给出拉普拉斯变换表，供读者查用. 在求解时，要用到的拉普拉斯变换性质写在附录 III 中，以便帮助读者领会方法.

§3-4 拉普拉斯变换应用

利用 §3-3 中拉普拉斯变换，就可求解弦振动方程，热传导方程的混合问题的解.

1 弦振动问题

设有定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t),\ 0<x<\infty,\ 0<t & (3.4.1)\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0 & (3.4.2)\\ u(0,t)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}u_x(x,t)=0 & (3.4.3)\end{cases}$$

令 $U(x,p)$ 是 $u(x,t)$ 关于变量 t 的拉普拉斯变换，对弦振动方程 (3.4.1) 作关于变量 t 的拉普拉斯变换，并利用初始条件 (3.4.2)，得到二阶常微分方程

$$U_{xx}-(p^2/a^2)U=-F(p)/a^2 \qquad (3.4.4)$$

其中

$$F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt \qquad (3.4.5)$$

(3.4.4)的解为

$$U(x,p)=Ae^{px/a}+Be^{-px/a}+[F(p)/p^2] \qquad (3.4.6)$$

再对边界条件(3.4.3)作关于变量 t 的拉普拉斯变换，有

$$U(0,p)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}U_x(x,p)=0 \qquad (3.4.7)$$

根据(3.4.7)中第二个条件应有 $A=0$，现在利用(3.4.7)中第一个条件，得到

$$U(0,p)=B+[F(p)/p^2]=0$$

因此

$$U(x,p)=[F(p)/p^2][1-e^{-px/a}] \tag{3.4.8}$$

(a) 当 $f=f_0=$ 常数时，

$$U(x,p)=f_0\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^3}e^{-px/a}\right) \tag{3.4.9}$$

它的逆变换即此问题的解

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{f_0}{2}\left[t^2-\left(t-\dfrac{x}{a}\right)^2\right], & t\geqslant\dfrac{x}{a}\\[2ex] \dfrac{f_0}{2}t^2, & t\leqslant\dfrac{x}{a}\end{cases} \tag{3.4.10}$$

(b) 当 $f(t)=\cos\omega t$（ω 为常数）时，有 $F(p)=p/(\omega^2+p^2)$，因此

$$\begin{aligned}U(x,p)&=\frac{1}{p(\omega^2-p^2)}[1-e^{-px/a}]\\ &=\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\omega^2}\right][1-e^{-px/a}]\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

又因为

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p(\omega^2+p^2)}\right]=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)=\frac{2}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

令 $\Psi(t)=\sin^2\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)$，利用拉普拉斯变换的卷积性质 7，我们最后得出 $U(x,p)$ 的逆变换，即此问题的解为

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{2}{\omega^2}\left[\Psi(t)-\Psi\left(t-\dfrac{x}{a}\right)\right], & t\geqslant x/a\\[2ex] \dfrac{2}{\omega^2}\Psi(t), & t\leqslant x/a\end{cases} \tag{3.4.12}$$

2 热传导问题

求解半无限长细杆的热传导定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} - hu, & 0<x<+\infty, 0<t \quad (3.4.13) \\ u(x,0)=0 & \quad (3.4.14) \\ u(0,t)=u_0, & \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t)=0 \quad (3.4.15) \end{cases}$$

其中 h，u_0 均为常数.

令 $U(x,p)$ 是 $u(x,t)$ 关于变量 t 的拉普拉斯变换，对热传导方程(3.4.13)作关于变量 t 的拉普拉斯变换，得到二阶常微分方程

$$U_{xx} - \frac{p+h}{a^2} U = 0$$

p 为参数，其通解为

$$U(x,p) = Ae^{\frac{\sqrt{p+h}}{a}x} + Be^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x} \quad (3.4.16)$$

再对边界条件(3.4.15)作关于变量 t 的拉普拉斯变换，有

$$U(0,p) = u_0/p, \qquad \lim_{x\to+\infty} U(x,p) = 0 \quad (3.4.17)$$

根据(3.4.17)中第二个边界条件应有 $A=0$，再利用(3.4.17)中第一个边界条件，得到

$$U(0,p) = B = u_0/p$$

因此

$$U(x,p) = \frac{u_0}{p} e^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x} \quad (3.4.18)$$

因为

$$L^{-1}\left[\frac{u_0}{p}\right] = u_0 \quad (3.4.19)$$

由拉普拉斯变换的位移性质 6，得出

$$L^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x}] = e^{-ht} \cdot L^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]$$

从拉普拉斯变换表查得

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

再根据拉普拉斯变换的微分性质 2，可得

$$L^{-1}\left[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right]=L^{-1}\left[p\cdot\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-y^2}dy\right]$$

$$=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

所以

$$L^{-1}\left[e^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x}\right]=\frac{xe^{-ht-x^2/4a^2t}}{2a\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} \tag{3.4.20}$$

最后，由拉普拉斯变换的卷积性质 7，得出

$$u(x,t)=L^{-1}\left[\frac{u_0}{p}\cdot e^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x}\right]$$

$$=\frac{xu_0}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-h(t-\tau)-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau \tag{3.4.21}$$

如令 $h=0$, $\eta=\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}$, (3.4.21)变为

$$u(x,t)=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-\eta^2}d\eta$$

$$=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\eta^2}d\eta-\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta$$

$$=u_0\cdot\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]=u_0\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

其中

$$\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta,$$

$$\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta \tag{3.4.22}$$

分别称为误差函数、余误差函数. 注意,前面已称(3.4.22)中第一个积分为概率积分,或误差积分.

求解有限长细杆的热传导定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t & (3.4.23) \\ u(x,0) = u_0, & (3.4.24) \\ u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = u_1 & (3.4.25) \end{cases}$$

把 x 看成参数, 将 $u(x,t)$关于变量 t 作拉普拉斯变换, 记为 $U(x,p)$. 对热传导方程(3.4.23) 作关于变量 t 的拉普拉斯变换, 得到二阶常微分方程

$$U_{xx} - \frac{p}{a^2} U = -\frac{u_0}{a^2}$$

p 为参数,其通解为

$$U(x,p) = C_1 \mathrm{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} x + C_2 \mathrm{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} x + \frac{u_0}{p} \tag{3.4.26}$$

再对边界条件(3.4.25)作关于变量 t 的拉普拉斯变换, 有

$$U_x(0,p) = 0, \qquad U(l,p) = \frac{u_1}{p} \tag{3.4.27}$$

根据这组条件定出 $C_1 = 0, C_2 = \dfrac{u_1 - u_0}{p\,\mathrm{ch}\frac{\sqrt{p}}{a} l}$, 从而得出

$$U(x,p) = \frac{u_0}{p} + \frac{u_1 - u_0}{p} \cdot \frac{\mathrm{ch}\frac{\sqrt{p}}{a} x}{\mathrm{ch}\frac{\sqrt{p}}{a} l} \tag{3.4.28}$$

于是求(3.4.28)的象原函数, 得出

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \left[\frac{u_0}{p} + \frac{u_1 - u_0}{p} \frac{\mathrm{ch}\frac{\sqrt{p}}{a} x}{\mathrm{ch}\frac{\sqrt{p}}{a} l} \right] e^{pt} dp \tag{3.4.29}$$

就是(3.4.23)—(3.4.25)的解. 以下计算积分(3.4.29).

因为双曲余弦函数是偶函数, 故 $U(x,p)$是单值的. 又函数 U

的全体极点为

$$p_0=0,\quad p_k=-\frac{a^2\pi^2}{l^2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2,\quad k=1,2,\cdots$$

而且都是一阶极点，因而函数 Ue^{pt} 在这些极点处的留数可分别求得为

$$\underset{p=p_0}{\text{Res}}[Ue^{pt}]=u_1,$$

$$\underset{p=p_k}{\text{Res}}[Ue^{pt}]=\frac{(u_1-u_0)2a}{l\sqrt{p_k}}\frac{\text{ch}\frac{\sqrt{p_k}}{a}x}{\text{sh}\frac{\sqrt{p_k}}{a}l}e^{p_kt}$$

$$=\frac{2(-1)^k(u_1-u_0)}{\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\cdot e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2t}$$

根据留数的展开定理，我们将(3.4.29)化为形式

$$u(x,t)=u_1+\frac{2(u_1-u_0)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\left(k-\frac{1}{2}\right)}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\cdot e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2t}$$

本章小结

这章是用积分变换法求解古典的波动方程和热传导方程的定解问题，其主要的步骤如下：

第一，选择恰当的积分变换．对这个问题可从如下两方面考虑：首先应注意自变量的变化范围，付里叶变换要求作变换的自变量在 $(-\infty,+\infty)$ 内变化，拉普拉斯变换则要求作变换的自变量在 $(0,+\infty)$ 内变化．其次，要注意定解条件的形式，对某自变量取拉普拉斯变换时，定解条件中要给出该自变量等于零时的函数值及其有关导数值．

第二，确定定解条件中哪些需要取变换，哪些不需要取变换？一般说来，凡是对方程取变换时没有用过的条件，都要对它取变换，使它转化成为新方程的定解条件.

第三，如何求出逆变换．解决这个问题的方法是计算积分，即求逆变换，可用复变函数中的留数定理．特别值得提出，如果用查积分变换表的办法求逆变换，是十分方便的.

第三章　习　题

1　求下列函数的付里叶变换

(1) $\dfrac{\sin ax}{x}$ ($a>0$ 为实数)　　(2) $e^{-\eta x^2}$ ($\eta>0$)

(3) $\cos\eta x^2$, $\sin\eta x^2$ ($\eta>0$ 为实数)

(4) $e^{-a|x|}$ ($a>0$)

2　证明下列拉普拉斯变换式成立

(1) $L[\sin kt]=\dfrac{k}{p^2+k^2}$，$k$ 为实数，$\mathrm{Re}(p)>0$

(2) $L[\cos kt]=\dfrac{p}{p^2+k^2}$，$k$ 为实数，$\mathrm{Re}(p)>0$

(3) $L[\mathrm{sh}\,at]=\dfrac{a}{p^2-a^2}$，$\mathrm{Re}(p)>|a|$

(4) $L[t^m]=\dfrac{m!}{p^{m+1}}$，$m$ 为正整数，$\mathrm{Re}(p)>0$

3　一根无限长的均匀杆（无热源），其侧面绝热，初始温度分布为 $u(x,0)=Te^{-a|x|}$ ($a>0$，实数，T 是常数)．试求杆上的温度分布.

4　一根半无限长的均匀杆（无热源），$x=0$ 的一端保持零度，其侧面绝热，初始温度分布为 $u(x,0)=e^{3-x}$．试求杆上的温度分布.

5　求解热传导方程 $u_t=a^2u_{xx}$ ($-\infty<x<+\infty$, $0<t$) 的柯西问题，已知：(1) $u(x,0)=\sin x$，(2) $u(x,0)=x^2+1$.

6　一根半无限长的细杆，它的热传导系数为 k，导温系数为 $a^2\left(=\dfrac{k}{c\rho}\right)$，初始温度等于零，设在端点输入热量等于 Q．这时问题归结为

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}\\ u(x,0)=0,\quad -ku_x(0,t)=Q\end{cases}$$

试求细杆的温度分布，这里 k, a, Q 都是常数。

7 解下列定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1,\ x>0,\quad y>0\\ u(0,y)=y+1\\ u(x,0)=1\end{cases}$$

8 求上半平面内静电场的电位，即解下列定解问题

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0,\ y>0\\ u(x,0)=f(x)\\ \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} u=0\end{cases}$$

9* 一端固定的半无限长的弦最初静止在与 x 轴的正半轴相重合的位置上。一个大小为 F_0 的集中横向力从 $t=0$ 时在点 $x=0$ 开始以常速 $v=\dfrac{\partial y}{\partial t}$沿该弦运动。求该弦在随后任何时刻任何点上的位移 $y(x,t)$。

10* 设有一杆，它的一端固定，在另外一端受一外力 $F=A\sin\omega t$ 作用，其方向与杆的轴向相同，此时杆的纵向振动问题归结为

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad 0<t\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=0,\ Eu_x(l,t)=A\sin\omega t\end{cases}$$

其中 E 为杆的杨氏模量，A、ω 均为常数。试求此定解问题的解。

1 试求解无界弦的自由振动方程的如下初始值问题

(1) $u(x,0)=ax^2,\quad u_t(x,0)=\dfrac{1}{1+x^2}$

(2) $u(x,0)=a\sin\beta x,\quad u_t(x,0)=x\operatorname{sh}\omega x$

其中 a,β,ω 是常数。

12 试求解无界弦振动方程：$u_{tt}=a^2u_{xx}+\dfrac{xe^t}{(1+x^2)^2}$的初始值问题$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\dfrac{1}{1+x^2}$。

13 用付里叶变换法求出弦振动方程柯西问题的解：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx},\quad -\infty<x<+\infty,\quad 0<t\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)\end{cases}$$

14* 求出热传导方程柯西问题的解：

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < t \\ u(x, y, 0) = \sin x \cdot \sin y \end{cases}$$

附　　录

I　付里叶变换的若干基本性质

1　付里叶变换是线性变换，即

$$F[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2]$$

其中 α 和 β 是任意实数，f_1 和 f_2 是任意的可施行付里叶变换的函数。

2　可施行付里叶变换的任意函数 f_1 和 f_2 的卷积的付里叶变换等于 f_1 和 f_2 的付里叶变换的乘积，即

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2]$$

或

$$f_1 * f_2 = F^{-1}[F[f_1] \cdot F[f_2]]$$

3　可施行付里叶变换的任意函数 f_1 和 f_2 相乘后的付里叶变换等于 f_1 和 f_2 分别施行付里叶变换的卷积乘以 $\frac{1}{2\pi}$，即

$$F[f_1 \cdot f_2] = \frac{1}{2\pi} F[f_1] * F[f_2]$$

或

$$f_1 \cdot f_2 = \frac{1}{2\pi} F^{-1}[F[f_1] * F[f_2]]$$

4　如果 $f(x)$，$f'(x)$ 都可施行付里叶变换，而且当 $|x| \to \infty$ 时，$f(x) \to 0$，则有

$$F[f'(x)] = -i\lambda F[f(x)]$$

5　如果 $f(x)$，$f'(x)$ 都可施行付里叶变换，则有

$$F[ixf(x)] = \frac{d}{d\lambda} F[f]$$

II　积分恒等式的计算

$$\int_0^{+\infty}\cos\lambda(x-\xi)e^{-\lambda^2a^2t}d\lambda=I(x,\xi,t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \tag{2.1}$$

令 $\alpha=a^2t(>0)$, $\beta=(x-\xi)$, 则得出 $I(x,\xi,t)$ 应为

$$\int_0^{+\infty}\cos\lambda\beta e^{-\lambda^2\alpha}d\lambda=I(\alpha,\beta) \tag{2.2}$$

如固定 α 并在积分号下微分 β 后，则得出

$$-\int_0^{+\infty}\lambda\sin\lambda\beta e^{-\lambda^2\alpha}d\lambda=\frac{dI(\alpha,\beta)}{d\beta}$$

再将上式左端分部积分后，则得出

$$\frac{dI(\alpha,\beta)}{d\beta}=\left\{\frac{1}{2\alpha}\sin\lambda\beta e^{-\lambda^2\alpha}\right\}_{\lambda=0}^{\lambda=+\infty}-\frac{\beta}{2\alpha}\int_0^{+\infty}\cos\lambda\beta e^{-\lambda^2\alpha}d\lambda=-\frac{\beta}{2\alpha}I(\alpha,\beta) \tag{2.3}$$

此式当把 α 视为参数之后，就是关于 β 的可分离变量的一阶常微分方程，因此，它的解应为

$$I(\alpha,\beta)=Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}},\qquad C\text{——任意常数} \tag{2.4}$$

如令 $\beta=0$, 由(2.4)和(2.2)式便得出

$$c=I(\alpha,0)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda^2\alpha}d\lambda=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{2.5}$$

于是由(2.4)和(2.5)式便得出

$$I(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \tag{2.6}$$

如将 α 及 β 的表达式代入(2.6)，则得出

$$I(x,\xi,t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

它与(2.1)式完全一致.

III 拉普拉斯变换的某些性质

1 若 $f_1(t)$, $f_2(t)$都是象原函数, α、β 是任意两个实数或复数, 则

$$L[\alpha f_1+\beta f_2]=\alpha L[f_1]+\beta L[f_2]$$

2 如果 $f(t)$ 及 $f'(t)$(或更一般地直到 $f^{(n)}(t)$) 都是象原函数, 则

$$L[f'(t)]=pL[f(t)]-f(0)$$

或

$$L[f^{(n)}(t)]=p^nL[f(t)]-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)$$
$$-\cdots\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

其中 $f^{(k)}(0)$理解为右极限值 $\lim\limits_{t\to0^+}f^{(k)}(t)$.

3 若 $f(t)$是象原函数, 则

$$\frac{d}{dp}L[f(t)]=L[-tf(t)]$$

或更一般地

$$\frac{d^n}{dp^n}L[f(t)]=L[(-1)^nt^nf(t)]$$

4 (相似定理) 设 $a>0$, 则

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

5 (迟缓定理)

$$L[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}F(p)$$

6 (位移定理)

$$F(p-p_0)=L[e^{p_0t}f(t)]$$

7 (卷积定理)

$$L[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(p)\cdot F_2(p)$$

展开定理　如果 $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ 是半纯函数，并且满足条件

i，它的所有极点 p_k 都分布在半平面 $\mathrm{Re}(p)\leqslant S_0$ 上；

ii，有一簇圆周 C_n 存在，设 C_n 的半径为 R_n，而且

$$|p|=R_n,\ R_1<R_2<R_3<\cdots<R_n\longrightarrow\infty$$

在这簇圆周 C_n 上 $F(p)$ 关于 $\arg p$ 一致地趋于零．这时 $F(p)$ 的象原函数可以表示为

$$f(t)=\sum_k \mathrm{Res}[F(p_k)e^{p_k t}]$$

特别当 p_k 为一阶极点时，

$$f(t)=\sum_k \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}$$

IV 积分变换表

付里叶变换表

象 原 函 数	象 函 数
$f(t)$	$G(\lambda)=F[f]$
$f'(t)$	$(i\lambda)F[f]$
$f^{(n)}(t)$	$(i\lambda)^n F[f]$
$f(t)e^{i\alpha t}$	$G(\lambda-\alpha)$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$G_1(\lambda)G_2(\lambda)$，其中 G_i 是 $f_i(t)$ 的付里叶变换
$f(t)=\begin{cases} h & -\tau<t<\tau \\ 0 & 共\quad他 \end{cases}$	$2h\dfrac{\sin\omega\tau}{\omega}$
$u(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{i\lambda}$
$u(t)e^{-\alpha t}$，$\alpha>0$	$\dfrac{1}{\alpha+i\lambda}$
$e^{-\alpha\|t\|}$，$\alpha>0$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}$
$u(t)t$	$\dfrac{1}{(i\lambda)^2}$
$u(t)\sin\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{\alpha^2-\lambda^2}$
$u(t)\cos\alpha t$	$\dfrac{i\lambda}{\alpha^2-\lambda^2}$
$\delta(t)$	1
$\cos\alpha t$	$\pi[\delta(\lambda+\alpha)+\delta(\lambda-\alpha)]$
$\sin\alpha t$	$i\pi[\delta(\lambda+\alpha)-\delta(\lambda-\alpha)]$
$\dfrac{\sin\alpha t}{t}$	$\begin{cases} \pi, & \|\lambda\|<\alpha \\ 0, & \|\lambda\|>\alpha \end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$
$\begin{cases} e^{-ct+i\omega t}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$	$\dfrac{i}{\omega+\lambda+ic}$

续表

象　原　函　数	象　函　数
$\begin{cases} e^{i\omega t}, & a<t<b \\ 0, & t<a \text{ 或 } t>b \end{cases}$	$\frac{i}{\lambda+\omega}[e^{ia(\omega+\lambda)}-e^{ib(\omega+\lambda)}]$
$e^{-\eta t^2}(\mathrm{Re}(\eta)>0)$	$\left(\frac{\pi}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\lambda^2}{4\eta}}$
$\cos\eta t^2$	$\left(\frac{\pi}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\lambda^2}{4\eta}-\frac{\pi}{4}\right)$
$\sin\eta t^2$	$\left(\frac{\pi}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(-\frac{\lambda^2}{4\eta}+\frac{\pi}{4}\right)$
$\|t\|^{-s}(0<\mathrm{Re}(s)<1)$	$\frac{2}{\|\lambda\|^{1-s}}\Gamma(1-s)\sin\frac{1}{2}\pi s$
$\frac{1}{\|t\|}$	$\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\|\lambda\|}$
$\frac{1}{\|t\|}e^{-\alpha\|t\|}$	$\left(\frac{2\pi}{\alpha^2+\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[(\alpha^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha\right]^{\frac{1}{2}}$

拉普拉斯变换表

$f(t)$	$F(p)=L[f(t)]$
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
$f(t-\tau)$	$e^{-p\tau}F(p)$
$e^{p_0 t}f(t)$	$F(p-p_0)$
$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(p)F_2(p)$，其中$F_i(p)$是$f_i(t)$的拉普拉斯变换
$\delta(t)$	1
$u(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$t^n(n>-1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$

续表

te^{at}	$\dfrac{1}{(p-a)^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}t^n\ (n>-1)$	$\dfrac{\Gamma(n+1)}{(p+a)^{n+1}}$
$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p^3}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$
$J_0(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2-1}}$
$J_0(2\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{a^2}{p}}\mathrm{erfc}\left(\dfrac{a}{\sqrt{p}}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{\omega t}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\omega}{p}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin 2\sqrt{\omega t}$	$\dfrac{1}{p^{3/2}}e^{-\frac{\omega}{p}}$
$\mathrm{erf}\left(\dfrac{\omega}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{1}{p}e^{-\omega\sqrt{p}}\ (\omega\geqslant 0)$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\omega^2}{4t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{-\omega\sqrt{p}}$
$\mathrm{erf}(\sqrt{at})$	$\dfrac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$

第四章　波动方程的达朗倍尔法

前一章我们讨论了弦振动方程的积分变换解法，本章将要研究这类问题的另一种解法，即达朗倍尔法．达朗倍尔法的主要思想是：先求出偏微分方程的所谓“通解”，再使这样得出的通解适合初始条件，确定出所要求的解．达朗倍尔法还可以推广到三维波动方程的柯西问题．值得注意，这种解法不能随意地扩大到一般的偏微分方程．

§4-1　弦振动方程解的达朗倍尔公式

1　达朗倍尔公式

设有无界的自由振动弦的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & -\infty<x<+\infty, 0<t \quad (4.1.1) \\ u(x,0)=\varphi(x), & u_t(x,0)=\psi(x) \quad (4.1.2) \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 皆为已知函数．以下先讨论(4.1.1)与(4.1.2)的解法．

作自变量的替换

$$\xi=x-at,\quad \eta=x+at \tag{4.1.3}$$

利用复合函数微分法，得出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

同理有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right]$$

将上述二阶导数式代入(4.1.1)式，得出

$$u_{\xi\eta}=0 \tag{4.1.4}$$

将(4.1.4)式对 η 积分，得出

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=f(\xi),$$

$f(\xi)$是 ξ 的任意可微函数，再将上式对 ξ 积分，得出

$$u(\xi,\eta)=\int f(\xi)d\xi+f_2(\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta) \tag{4.1.5}$$

利用(4.1.3)式代回原来的变量 x，t，就得出

$$u(x,t)=f_1(x-at)+f_2(x+at) \tag{4.1.6}$$

其中 f_1 与 f_2 是两个任意连续两次可微函数。只需直接代入即可验证(4.1.6)确实是方程(4.1.1)的解，并称它为方程的"通解"。

显然，为了要定出初始值问题的解，还必须看一看能否利用初始条件(4.1.2)去确定式(4.1.6)中的两个任意函数 f_1 与 f_2。为此，将(4.1.6)式代入初始条件(4.1.2)，就得出

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x) \tag{4.1.7}$$

$$-af_1'(x)+af_2'(x)=\psi(x) \tag{4.1.8}$$

将(4.1.8)积分一次后得出

$$-af_1(x)+af_2(x)=\int_{x_0}^{x}\psi(\tau)d\tau+C \tag{4.1.9}$$

其中 x_0 是指定的参数，C 是任意的积分常数。由(4.1.7)与(4.1.9)式解出 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，便得出

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\tau)d\tau-\frac{C}{2a} \tag{4.1.10}$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\tau)d\tau+\frac{C}{2a} \tag{4.1.11}$$

将(4.1.10)式中 x 换成 $x-at$，(4.1.11)式中 x 换成 $x+at$ 后，再

代入(4.1.6)中得出

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau \quad (4.1.12)$$

利用直接微分法可以验证，当函数 $\varphi(x)$ 是二次连续可微，函数 $\psi(x)$ 是一次连续可微时，表达式 (4.1.12) 必是初始值问题(4.1.1)与(4.1.2)的解．我们称解的表达式(4.1.12)为**达朗倍尔公式**．同时，从求解的过程中可以看出解是唯一的，又从达朗倍尔公式使我们容易看出解是连续依赖于初始条件(4.1.2)的，即初始条件(4.1.2)作微小变化时，解(4.1.12)的变化也是很小的．

2 达朗倍尔公式的物理意义

从刚才的讨论可以看出，(4.1.1)与(4.1.2) 的解首先表为两个函数 $f_1(x-at)$ 与 $f_2(x+at)$ 之和，再进一步利用初始条件(4.1.2) 去确定函数 $f_1(x-at)$ 与 $f_2(x+at)$的具体形式．因此，就需要先去研究函数 $f_1(x-at)$与 $f_2(x+at)$的物理意义．

令

$$u=f(x-at) \quad (4.1.13)$$

因为它是自由振动弦(4.1.1)的解，于是给出 t 不同的值，就可以得出弦在各个不同时刻的振动状态．当 $t=0$ 时 $u=f(x)$，它对应着弦的初始振动状态，如图 4-1 所示．这样当经过时间 t 之后，

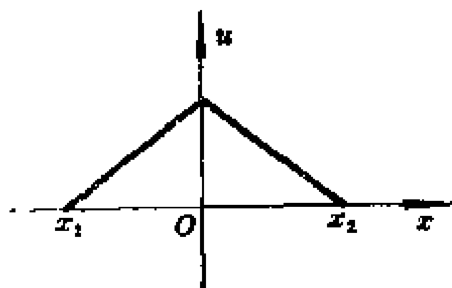


图 4-1

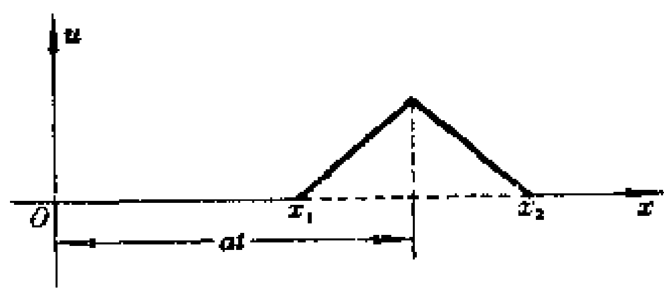


图 4-2

$u=f(x-at)$，因而振动弦的外形保持不变，它在(x,u)平面上相对于原来的图形向右平移一段距离 at，如图 4-2 所示．这些图形说

明，当方程(4.1.1)的解表达为(4.1.13)时，随着时间 t 的推移，弦线上的质点的振动所构成的外形是以常速度 a 向 x 轴正方向传播的．因此，$u=f(x-at)$表示一个以速度 a 沿 x 轴正方向传播的**行波**，或称为**正波**．

完全同样，形如

$$u=f(x+at) \tag{4.1.14}$$

的解表示一个以速度 a 沿 x 轴负方向传播的**行波**，或称为**反波**．如图 4-3 所示．

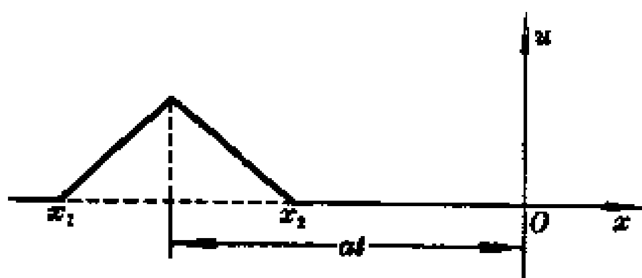


图 4-3

从达朗倍尔公式(4.1.12)可以看出，自由振动弦上的任意初始扰动，其后的影响总是以行波的形式分别向两个方向传播出去，传播的速度恰好是弦振动方程中的常数 a．这就是达朗倍尔公式的物理意义．

3 依赖区间、决定区域和影响区域

从达朗倍尔公式(4.1.12)还可以看出，解在(x,t)点的数值仅依赖于 x 轴上区间$[x-at,x+at]$内的初始条件，而与其它点上的初始条件无关．区间$[x-at,x+at]$称为点(x,t)的**依赖区间**．它是由过(x,t)点的两条斜率分别为 $\pm\frac{1}{a}$的直线在 x 轴所截得的区间，如图 4-4 所示。

对于初始轴 $t=0$ 上的一个区间 $[x_1,x_2]$，过 x_1 点作斜率为$\frac{1}{a}$的直线 $x=x_1+at$，过 x_2 点作斜率为$-\frac{1}{a}$的直线 $x=x_2-at$，它

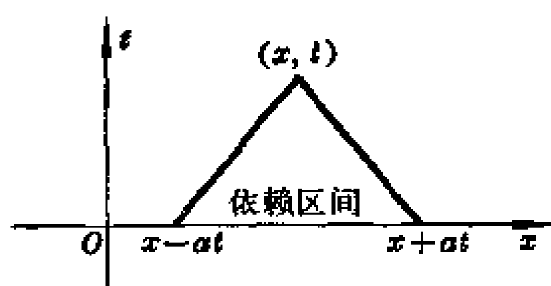


图 4-4

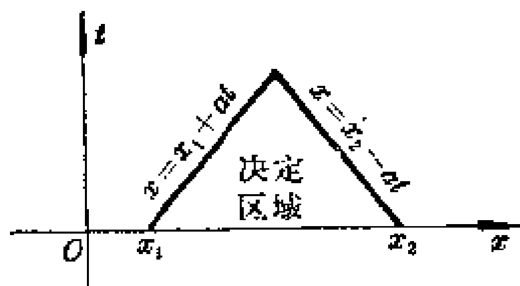


图 4-5

们和区间$[x_1, x_2]$一起构成一个三角形区域．此三角形区域中任意一点(x, t)的依赖区间都落在区间$[x_1, x_2]$的内部，因此，解在此三角形区域中的数值完全由区间$[x_1, x_2]$上的初始条件决定，而与此区间外的初始条件无关，这个区域称为区间$[x_1, x_2]$的**决定区域**，如图 4-5 所示，表示如下

$$x_1+at\leqslant x\leqslant x_2-at \tag{4.1.15}$$

如果于初始时刻$(t=0)$弦线仅在一有限段$[x_1, x_2]$上有一扰动，那末经过时间t后，受到这扰动影响的范围由不等式

$$x_1-at\leqslant x\leqslant x_2+at, \quad (t>0) \tag{4.1.16}$$

所限定，而在这个区域之外弦线仍处于静止状态．在(x, t)平面上，(4.1.16) 表示一个区域，如图 4-6 所示．这区域中的任意一点(x_0, t_0)是受到扰动的影响的，具体地说，在位置x_0处的弦线上的质点在时刻t_0一定会受到初始扰动的影响．而在此区域外的任意一点，其坐标表示在某一时刻中某一点还未受到扰动的影响．因

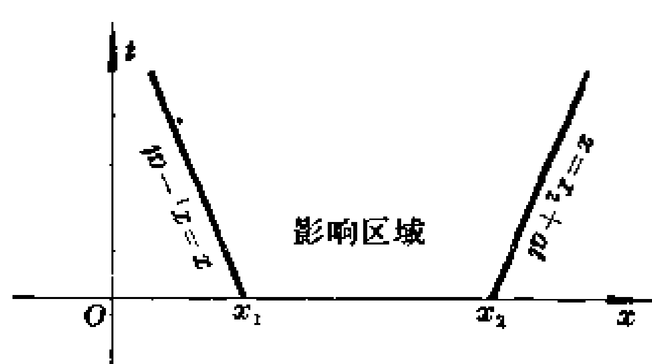


图 4-6

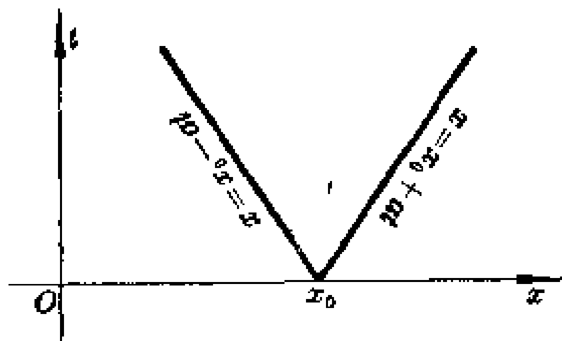


图 4-7

此，我们称区域(4.1.16)为区间$[x_1, x_2]$的**影响区域**．从而，在这个区域中，$u(x, t)$的数值是受到区间$[x_1, x_2]$上的初始条件的影响，而在区域之外，$u(x, t)$的数值不会受区间$[x_1, x_2]$上的初始条件的影响．

当区间$[x_1, x_2]$收缩成一点x_0时，就得到x_0的影响区域为通过x_0的两条直线 $x=x_0-at$ 与 $x=x_0+at$

所组成的区域：

$$x_0-at\leqslant x\leqslant x_0+at,\ (t>0) \tag{4.1.17}$$

如图 4-7 所示．

§4-2 三维波动方程解的泊松公式 球面波

前节我们已经讨论了弦振动方程(一维波动方程)的初始值问题，获得了达朗倍尔公式．本节我们首先考虑三维波动方程的初始值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & -\infty<x, y, z<+\infty, 0<t \quad (4.2.1) \\ u|_{t=0}=\varphi(x, y, z), & u_t|_{t=0}=\psi(x, y, z) \quad (4.2.2) \end{cases}$$

对于这样的定解问题，我们仍然仿照§4-1的方法，先求(4.2.1)的“通解”，再令其适合初始条件(4.2.2)，定出原问题的解．

在解题过程中，为叙述方便起见，先引入球面平均函数概念，再利用它去表示“通解”，最后令其适合初始条件，从而定出原问题的解．

1 球面平均函数

设M为空间任意一点(x, y, z)，$u(x, y, z)$在整个空间连续且有直到二阶连续导数的任意函数．我们引入一个函数$\bar{u}(r, t)$，它是$u(M, t)$在以M_0为中心，r为半径的球面$S_r^{M_0}$上积分的平均值

$$\bar{u}(r, t)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r^{M_0}} u(M, t)dS=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_r^{M_0}} u(M, t)d\omega \tag{4.2.3}$$

其中球面上的微元面积 $dS=r^2\sin\theta d\theta d\varphi=r^2 d\omega$，$d\omega=\sin\theta d\theta d\varphi$ 称为**立体角元素**．半径 r 和时间 t 是两个独立变量，$\bar{u}(r,t)$ 是 r 与 t 的函数，称它为**球面平均函数**．因为 $\bar{u}(r,t)$ 的自变量的个数比起 $u(M,t)$ 的自变量个数少，所以研究起来比较方便一些．

从(4.2.3)容易得出，当 $t=t_0$，$r=0$ 时，引用积分中值定理后有

$$\bar{u}(0,t_0)=\lim_{r\to 0}\bar{u}(r,t_0)=\lim_{r\to 0}u(M^*,t_0)=u(M_0,t_0)$$

即

$$\bar{u}(0,t_0)=u(M_0,t_0) \tag{4.2.4}$$

2　泊松公式

设(4.2.1)有解存在，下面需要求出解的表达式．设 $S_r^{M_0}$ 所围成的球体为 $\Omega_r^{M_0}$，将(4.2.1)的两端沿 $\Omega_r^{M_0}$ 取三重积分后得出

$$\iiint_{\Omega_r^{M_0}} u_{tt}dV=\iiint_{\Omega_r^{M_0}} a^2\Delta u dV \tag{4.2.5}$$

由于 $dV=r^2drd\omega$，所以(4.2.5)的左端的积分

$$\iiint_{\Omega_r^{M_0}} u_{tt}dV=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint_{\Omega_r^{M_0}} u dV=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r r'^2\iint_{S_{r'}^{M_0}} u d\omega dr'$$

$$=4\pi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \bar{u}(r',t)r'^2 dr'$$

(4.2.5)式右端的积分

$$a^2\iiint_{\Omega_r^{M_0}}\Delta u dV=a^2\iiint_{\Omega_r^{M_0}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dV$$

$$\xlongequal{\text{高斯公式}}a^2\iint_{S_r^{M_0}}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)\right.$$

$$+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n,z)\Big]dS=a^2\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

$$=a^2\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial n}r^2d\omega=a^2r^2\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial n}d\omega$$

$$=a^2r^2\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial r}d\omega=a^2r^2\frac{\partial}{\partial r}\iint\limits_{S_r^{M_0}}u\,d\omega$$

$$=4\pi a^2r^2\frac{\partial}{\partial r}\bar{u}(r,t)$$

把上面结果代入(4.2.5)式得出

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r\bar{u}(r',t)r'^2dr'=a^2r^2\frac{\partial}{\partial r}\bar{u}(r,t)$$

上式两端对 r 求导后得出

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[\bar{u}(r,t)r^2\Big]=a^2\frac{\partial}{\partial r}\Big[r^2\frac{\partial}{\partial r}\bar{u}(r,t)\Big]$$

两端除以 r^2 得出

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{u}(r,t)=a^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big[r^2\frac{\partial}{\partial r}\bar{u}(r,t)\Big]$$

$$=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2[r\bar{u}(r,t)]}{\partial r^2}\tag{4.2.6}$$

即

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[r\bar{u}(r,t)]=a^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}[r\bar{u}(r,t)]$$

令 $v(r,t)=r\bar{u}(r,t)$，上式可写成为

$$v_{rr}=\frac{1}{a^2}v_{tt},\qquad (0<r)\tag{4.2.7}$$

它与弦振动方程完全类似，其通解为

$$v(r,t)=f_1\Big(t-\frac{r}{a}\Big)+f_2\Big(t+\frac{r}{a}\Big)\tag{4.2.8}$$

其中 f_1 与 f_2 是连续可微两次的任意函数。

以下要求出适合初始条件的解. 为此, 注意 $v(r, t)=r\bar{u}(r, t)$, 可知 $v(0, t)=0$, 代入 (4.2.8), 令 $r=0$ 时, (4.2.8) 式可写成为

$$0=f_1(t)+f_2(t)$$

即

$$f_1(t)=-f_2(t)=-f(t), f(t) \text{是任意函数} \tag{4.2.9}$$

将 $v=r\bar{u}$ 代入(4.2.8)式, 由于(4.2.9)式得出

$$r\bar{u}=f\left(t+\frac{r}{a}\right)-f\left(t-\frac{r}{a}\right) \tag{4.2.10}$$

上式两端对 r 求导后得出

$$\bar{u}+r\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}=\frac{1}{a}\left[f'\left(t+\frac{r}{a}\right)+f'\left(t-\frac{r}{a}\right)\right]$$

令 $r=0$, $t=t_0$ 时, 上式可写成为

$$\bar{u}(0, t_0)=u(M_0, t_0)=\frac{2}{a}f'(t_0) \tag{4.2.11}$$

另外, 将(4.2.10)分别对 r、t 求导后得出

$$\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial r}=\frac{1}{a}\left[f'\left(t-\frac{r}{a}\right)+f'\left(t+\frac{r}{a}\right)\right]$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial t}=\frac{1}{a}\left[-f'\left(t-\frac{r}{a}\right)-f'\left(t+\frac{r}{a}\right)\right]$$

令两式相加后得出

$$\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial r}+\frac{1}{a}\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial t}=\frac{2}{a}f'\left(t+\frac{r}{a}\right)$$

此式令 $t=0$, $r=at_0$, 则得出

$$\left[\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial r}+\frac{1}{a}\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial t}\right]_{\substack{t=0\\ r=at_0}}=\frac{2}{a}f'(t_0)$$

以此式代入(4.2.11)中得出

$$u(M_0, t_0)=\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u})\right]_{\substack{t=0\\ r=at_0}}$$

用(4.2.3)中的 $\bar{u}$ 代入此式，则得出

$$u(M_0, t_0)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{1}{r}udS+\frac{1}{a}\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}dS\right]_{\substack{t=0\\ r=at_0}}$$

将初始条件(4.2.2)代入后，并略去 (M_0, t_0) 中脚标 0，则得出(4.2.1)、(4.2.2)解的泊松公式

$$u(M, t)=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_r^M}\frac{\varphi}{r}dS+\iint\limits_{S_r^M}\frac{\psi}{r}dS\right]_{r=at} \qquad (4.2.12)$$

今后为了计算方便，常把(4.2.12)化成球面坐标系。为此，先引进坐标变换关系：

$$\begin{cases}\xi=x+r\sin\theta\cos\varphi\\ \eta=y+r\sin\theta\sin\varphi\\ \zeta=z+r\cos\theta\end{cases}$$

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

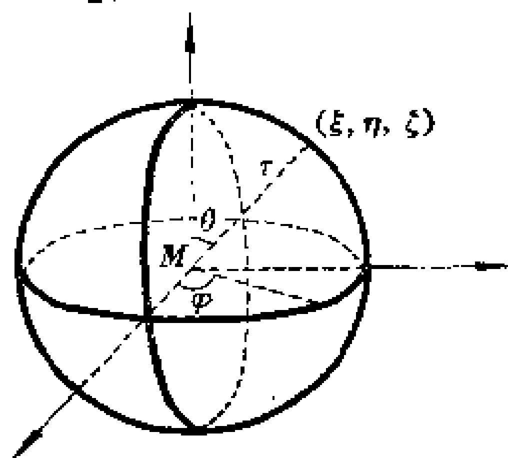


图 4-8

如图 4-8 所示。因而(4.2.12)可写成为

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x+r\sin\theta\cos\varphi, y+r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z+r\cos\theta)r\sin\theta d\theta d\varphi\,|_{r=at}$$
$$+\frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(x+r\sin\theta\cos\varphi, y+r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z+r\cos\theta)r\sin\theta d\theta d\varphi\,|_{r=at}$$
(4.2.13)

例 利用泊松公式求解波动方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$$

的柯西问题

$$u|_{t=0}=x^3+y^2z, \; u_t|_{t=0}=0$$

解 由(4.2.13)式得出解为

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} at\left[(x+at\sin\theta\cos\varphi)^3\right.\right.$$

$$\left.\left.+(y+at\sin\theta\sin\varphi)^2(z+at\cos\theta)\right]\sin\theta d\theta d\varphi\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left\{4\pi atx^3+4\pi xa^3t^3+4\pi aty^2z\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}\pi a^3t^3z\right\}=x^3+3a^2t^2x+y^2z+a^2t^2z$$

3 泊松公式的物理意义

为了形象化，我们研究局部扰动的传播．假设初始值函数 $\varphi>0,\ \psi>0$，它们只在空间某个有限区域 T_0 内不为零．考虑 φ、ψ 对固定点 M_0 的扰动，而函数 u 在点 M_0、时刻 t 的值 $u(M_0,t)$，根据(4.2.12)式，由初始值函数 φ、ψ 在球面 $S_{at}^{M_0}$ 上的值所决定．只有当球面 $S_{at}^{M_0}$ 与区域 T_0 相交时，$u(M_0,t)$ 才不等于零，否则 $u(M_0,t)=0$．设 d 与 D 分别表示点 M_0 到区域 T_0 的最近点与最远点的距离(如图 4-9)．显然，当 $t<t_1=\dfrac{d}{a}$ 时，球面 $S_{at}^{M_0}$ 不与 T_0 相交，所以 $u(M_0,t)=0$，这表示扰动的“前锋”还未到达 M_0．当 $t_1=\dfrac{d}{a}<t<t_2=\dfrac{D}{a}$ 时，球面 $S_{at}^{M_0}$ 与 T_0 都相交，所以 $u(M_0,t)\neq 0$，这时点 M_0 处于扰动状态．当 $t>t_2=\dfrac{D}{a}$ 时，球面 $S_{at}^{M_0}$ 又不与 T_0 相交，所以 $u(M_0,t)=0$，这表示扰动的“阵尾”已走过这一点 M_0．

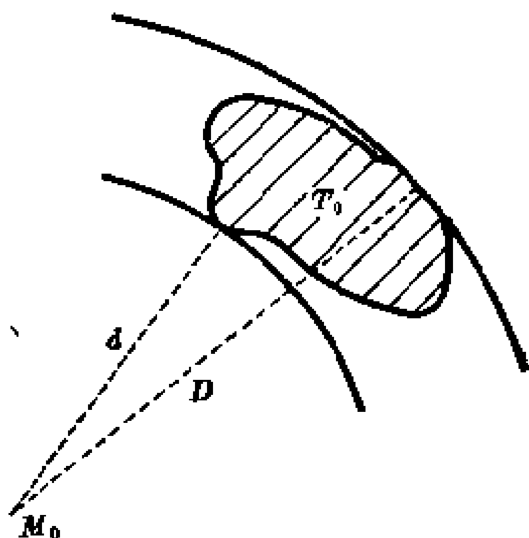


图 4-9

三维空间中局部扰动的这种传播现象称为**无后效现象**.

又由于在点$(\xi,\eta,\zeta)\in T_0$的初始扰动是向各个方向传播的，在时间t它的影响是以(ξ,η,ζ)为中心，at为半径的一个球面上，因此解(4.2.12)称为**球面波**.

§4-3 降维法——二维波动方程解的泊松公式 柱面波

现在我们研究二维波动方程的初始值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}), -\infty<x, y<+\infty, 0<t & (4.3.1)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y),\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y) & (4.3.2)\end{cases}$$

我们利用§4-2中三维波动方程初始值问题解的结果来处理这个问题。这是因为对于所考虑的二维问题的解$u(x,y,t)$总可以看成为高一维空间(x,y,z,t)中的函数$\tilde{u}(x,y,z,t)=u(x,y,t)$，它与自变量$z$无关，因此满足三维波动方程

$$\tilde{u}_{tt}=a^2(\tilde{u}_{xx}+\tilde{u}_{yy}+\tilde{u}_{zz}) \qquad (4.3.3)$$

及初始条件

$$\tilde{u}|_{t=0}=\varphi(x,y),\ \tilde{u}_t|_{t=0}=\psi(x,y) \qquad (4.3.4)$$

其中$\varphi(x,y)$，$\psi(x,y)$也已视为空间$(x、y,z)$中的函数。反之，如果三维波动方程的初始值问题(4.3.3)、(4.3.4)的解$\tilde{u}(x,y,z,t)$是一个与自变量z无关的函数，则它所满足的方程和初始条件都化为二维波动方程初始值问题(4.3.1)、(4.3.2).

因此，我们如果解出三维波动方程初始值问题(4.3.3)、(4.3.4)，并能证明这个问题的解$\tilde{u}(x,y,z,t)$是与z无关的函数，那么二维波动方程初始值问题(4.3.1)，(4.3.2)也就得到了解决.
这种利用高维波动方程初始值问题得出低维波动方程初始值问题解的方法称为**降维法**.

1 泊松公式

利用三维波动方程初始值问题解的泊松公式(4.2.12)于定解问题(4.3.3)、(4.3.4)，得出

$$\tilde{u}=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^M}\frac{\varphi}{r}dS\right\}+\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^M}\frac{\psi}{r}dS \tag{4.3.5}$$

这里积分是在三维空间 (x, y, z) 中的球面 S_{at}^M 上进行．由于 φ、ψ 都是与 z 无关的柱函数，因此在球面上的积分可以化为在平面 $z=$常数上投影 Σ_{at}^M: $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant(at)^2$ 上面的积分．由于球面上的面积元素 dS 和它的投影元素 $d\sigma$ 之间有如下关系

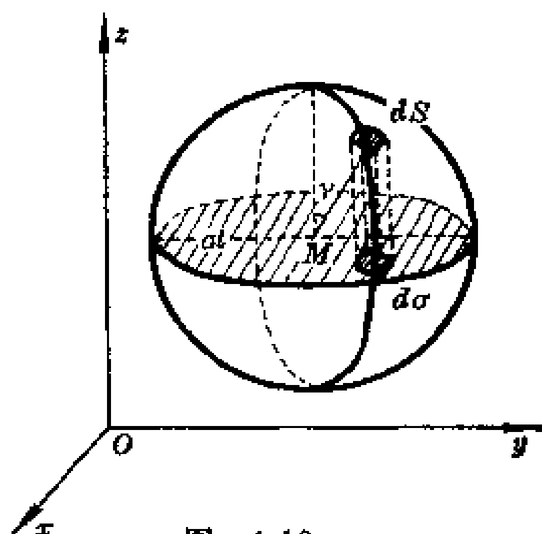


图 4-10

$$d\sigma=dS\cdot\cos\gamma$$

其中 γ 为这两个面积元素法线方向间的夹角，如图 4-10，所以

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}{at}$$

又球面 S_{at}^M 上下两半的积分都变成投影到同一圆域上的积分，所以泊松公式(4.3.5)中的 $\tilde{u}$ 表示成

$$\tilde{u}=\tilde{u}(M, t)=\frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right.$$

$$\left.+\iint_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}rdrd\theta\right.$$

$$+\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}rdrd\theta \qquad (4.3.6)$$

它的确是与 z 无关的柱形函数．因此，(4.3.6)式就给出了定解问题(4.3.1)，(4.3.2)的解，它称为二维波动方程初始值问题解的泊松公式．

例 求解平面波动方程的柯西问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\ -\infty<x,y<+\infty,\ 0<t\\ u|_{t=0}=x^2(x+y),\ u_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

解 利用(4.3.6)式得出解

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{(x+r\cos\theta)^2[(x+r\cos\theta)-(y+r\sin\theta)]}{\sqrt{(at)^2-r^2}}rdrd\theta\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{at}\frac{rdr}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\left[\int_0^{2\pi}(x^3+x^2y)d\theta\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^{2\pi}(3x+y)r^2\cos^2\theta d\theta\right]\right\}$$

$$=(x^3+x^2y)+(3x+y)a^2t^2$$

2 泊松公式的物理意义

设初始扰动给定在 XOY 平面上某一有界区域 S_0 中，考虑解 u 在任意一点 M_0 的状况，根据(4.3.6)式，$u(M_0,t)$的值由初始值函数 φ,ψ 在 $\Sigma_{at}^{M_0}$ 上的值所决定．设 d、D 分别表示 M_0 与 S_0 的最

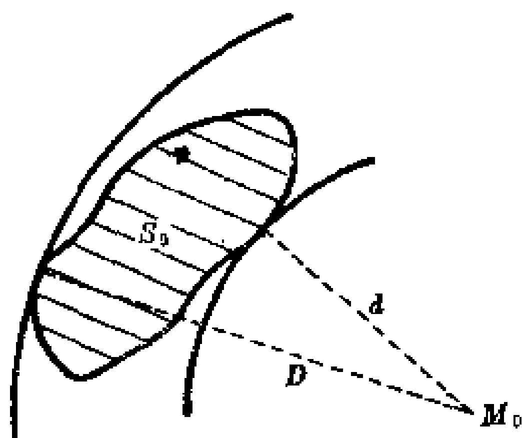


图 4-11

近点与最远点之间的距离．显然，当 $t<t_1=\dfrac{d}{a}$时，$u(M_0,t)=0$，

这时扰动的"前锋"还未到达M_0. 当$t_1=\frac{d}{a}<t<\frac{D}{a}=t_2$时, $u(M_0, t)\neq 0$, 这时点M_0处正处于扰动状态中. 当$t>t_2=\frac{D}{a}$时, $u(M_0, t)\neq 0$, 这时点M_0处仍处于扰动状态中. 这种扰动状态一般先增大, 然后从某一时刻起开始衰弱, 渐渐趋于零 ($t\to\infty$). 这种传播现象: 平面上的初始局部扰动在平面上每一点不是在有限时间内发生影响, 而是有持久的后效. 称这种传播现象为**波的弥散**, 或说这种传播波有**后效现象**. 把§4-2、3 中的空间传播和这里的平面传播比较, 可以看出, 区别在于前者是无后效现象, 后者是有后效现象的.

平面上以点 (ξ,η) 为中心的圆周的方程$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=r^2$ 在空间坐标系内表示母线平行于z轴的直圆柱面, 所以过(ξ,η)点平行于z轴的无限长的直线上的初始扰动, 在时间t时的影响是在以该直线为轴、at为半径的圆柱面内, 因此解(4.3.6) 称为**柱面波**.

§4-4* 强迫振动方程 推迟势

我们讨论非齐次波动方程的初始值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t) & (4.4.1)\\ \qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty,\ 0<t) & \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x,y,z) & (4.4.2)\end{cases}$$

显然, 上述定解问题总可以分解成两个问题来解决: 第一个问题是求齐次方程(4.2.1)满足非齐次初始条件(4.2.2)的解, 这样的解已由(4.2.12) 式给出; 第二个问题是求非齐次方程(4.4.1)满足齐次初始条件

$$u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=0 \tag{4.4.3}$$

的解. 注意这里f,φ,ψ均为已知函数.

上述第二个问题可用下述方法解决. 首先求出齐次方程的下述问题的解$\omega(x,y,z,t,\tau)$:

$$\begin{cases}\omega_{tt}=a^2(\omega_{xx}+\omega_{yy}+\omega_{zz}), & -\infty<x,y,z<+\infty,\tau<t \qquad (4.4.4)\\ \omega\Big|_{t=\tau}=0, \quad \omega_t\Big|_{t=\tau}=f(x,y,z,\tau) & \qquad (4.4.5)\end{cases}$$

然后将 ω 关于参数 τ 积分，得到

$$u(x,y,z,t)=\int_0^t\omega(x,y,z,t,\tau)d\tau \qquad (4.4.6)$$

就是初始值问题(4.4.1)、(4.4.3)的解．以下证明这一事实．直接微分(4.4.6)，得出

$$u_t=\omega\Big|_{t=\tau}+\int_0^t\omega_t d\tau=\int_0^t\omega_t d\tau$$

$$u_{tt}=\omega_t\Big|_{t=\tau}+\int_0^t\omega_{tt}d\tau=f\Big|_{t=\tau}+\int_0^t\omega_{tt}d\tau \qquad (4.4.7)$$

$$\Delta u=\int_0^t\Delta\omega d\tau$$

由于(4.4.4)可知

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t)$$

又从(4.4.6)式得出 $u\Big|_{t=0}=0$，从(4.4.7)的第一式得出 $u_t\Big|_{t=0}=0$．证毕．

利用泊松公式(4.2.12)式，得出(4.4.4)、(4.4.5)的解的表达式为

$$\omega(x,y,z,t,\tau)=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S^M_{a(t-\tau)}}\left[\frac{f(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{r}\right]_{r=a(t-\tau)}dS \qquad (4.4.8)$$

将(4.4.8)代入(4.4.6)后，得出第二个问题的解的表达式为

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\int_0^t\iint\limits_{S^M_{a(t-\tau)}}\left[\frac{f(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{r}\right]_{r=a(t-\tau)}dSd\tau$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\iint\limits_{S^M_r}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dSdr \quad \left(\tau=t-\frac{r}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r\leq at}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dV \qquad (4.4.9)$$

其中 dV 表示体积元素，积分在以 $M(x,y,z)$ 为中心，at 为半径的球体中进行．因此在时刻 t，位于 $M(x,y,z)$ 处的函数值 u 应由 f 在时刻 $\tau=t-\frac{r}{a}$ 处的值在此球中的体积积分表出．称这样的积分(4.4.9)为**推迟势**．

因为第一个问题的解已由(4.2.12)给出:

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\varphi}{r}dS\right\}+\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\psi}{r}dS \tag{4.4.10}$$

从(4.4.9)、(4.4.10)即得出(4.4.1)(4.4.2)的解为

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\varphi}{r}dS\right\}+\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\psi}{r}dS$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r\leq at}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\dfrac{r}{a}\right)}{r}dV \tag{4.4.11}$$

一、二维情况可类似地进行讨论,建议读者自己练习.

第四章 习 题

1 若$f(x+at)$与$g(x-at)$为任意两个连续可微二次的函数,证明$f+g$必满足弦振动方程:$u_{tt}=a^2u_{xx}$.

2 求方程$\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=x^2y$满足边界条件$u\Big|_{y=0}=x^2$与$u\Big|_{x=1}=\cos y$的解.

3 证明一维非齐次波动方程初始值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & -\infty<x<+\infty,0<t\\ u(x,0)=\varphi(x), & u_t(x,0)=\psi(x)\end{cases}$$

的解的表达式为

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

4 求解下列定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xx}+t\sin x\\ u\Big|_{t=0}=0,\ u_t\Big|_{t=0}=\sin x\end{cases}$$

5 求满足波动方程$u_{tt}=4u_{xx}$及初始条件 $u(x,0)=x,u_t(x,0)=1$ 的解.

6* 求定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\\ u(x,0)=3x^2,\ u_y(x,0)=0\end{cases}$$

的解.

7* 求半无界弦的振动方程 $u_{tt}=9u_{xx}$ 在初始条件 $u(x,0)=0, u_t(x,0)=\cos x$ 下的解.

8* 求定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \quad (y<0)\\ u(x,0)=h(x), \quad \lim\limits_{y\to 0^-} u_y(x,y) \text{ 有界}\end{cases}$$

的解.

9 求二维波动方程的轴对称解(即二维波动方程的形如 $u=u(r,t)$ 的解, $r=\sqrt{x^2+y^2}$).

10 试推导出二维非齐次波动方程初始值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t), \quad -\infty<x,y<+\infty, 0<t\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x,y), \quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x,y)\end{cases}$$

的解的表达式为

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\left[\iint\limits_{\Sigma_{a(t-\tau)}^M}\frac{f(\xi,\eta,\tau)\,d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right]d\tau$$

11 解非齐次方程的柯西问题

$$\begin{cases}u_{tt}=\Delta u+2(y-t)\\ u\big|_{t=0}=0, \quad u_t\big|_{t=0}=x^2+yz\end{cases}$$

12 求解下列柯西问题

$$\begin{cases}v_{tt}=a^2(v_{xx}+v_{yy})+c^2v\\ v\big|_{t=0}=\varphi(x,y), \quad v_t\big|_{t=0}=\psi(x,y)\end{cases}$$

13 试用降维法导出弦振动方程的达朗倍尔公式.

第五章 格林函数法

本章讨论拉普拉斯方程与泊松方程的两类边值问题——狄利克莱问题与牛曼问题的解法，以及解的重要性质，利用格林函数法把解的表达式确定出来．最后举出几个具体区域，定出格林函数，具体地写出解的表达式．

§5-1 拉普拉斯方程的基本解

1 两类边值问题

本章我们主要研究拉普拉斯方程

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 \tag{5.1.1}$$

与泊松方程

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=-f(x,y,z) \tag{5.1.2}$$

的两类边值问题．

定义 如果函数 $u(x,y,z)$ 在区域 $\Omega+\Gamma$（Γ 是区域 Ω 的边界）上具有直到二阶的连续偏导数、它本身还连续，在 Ω 内满足拉普拉斯方程，则称 $u(x,y,z)$ 为区域 Ω 上的调和函数．

狄利克莱问题（第一边值问题） 在空间 (x,y,z) 中某一区域 Ω 的边界 Γ 上给定了一个连续函数 φ，要求找出一个函数 $u(x,y,z)$，它在 Ω 内满足方程(5.1.1)或(5.1.2)，在 $\Omega+\Gamma$ 上连续，并且满足

$$u|_{\Gamma}=\varphi \tag{5.1.3}$$

牛曼问题（第二类边值问题） 在空间 (x,y,z) 中某光滑的闭曲面 Γ 上给出连续函数 φ，要求找出一个函数 $u(x,y,z)$，它在 Ω 内

满足方程(5.1.1)或(5.1.2)，在 $\Omega+\Gamma$ 上连续，在 Γ 上任一点法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 存在，并且满足

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\varphi \tag{5.1.4}$$

这里 n 是 Γ 的外法线方向.

方程(5.1.1)与(5.1.2) 在力学和物理学中是会经常碰到的，如第一章中我们已经看到，当研究稳定状态下，有热源的热传导问题就导出泊松方程. 特别地，当没有热源时就得到拉普拉斯方程. 此外，不可压缩理想流体无旋流动的速度势，以及静电场的电位等也都满足拉普拉斯方程(5.1.1)和泊松方程(5.1.2).

在讨论方程(5.1.1)与(5.1.2)的边值问题时，拉普拉斯方程的基本解起着十分重要作用，在此先作介绍.

2 拉普拉斯方程的基本解

在场论中，我们曾导出过方程(5.1.1)在球面坐标及柱面坐标下的形式如下：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \tag{5.1.5}$$

与

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{5.1.6}$$

从(5.1.5)式可知，拉普拉斯方程的球对称解，即与 θ、φ 无关仅由 r 确定的解 $u=U(r)$ 将由下列常微分方程

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0$$

中定出. 解出这个方程后得出

$$U=\frac{C_1}{r}+C_2$$

C_1、C_2 为任意常数. 取 $C_1=1, C_2=0$, 则得出函数

$$U=\frac{1}{r} \tag{5.1.7}$$

可代入验证 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0(r\neq 0)$. 通常我们称函数(5.1.7)为空间拉普拉斯方程的基本解.

类似地, 在平面情况, 从(5.1.6)可知, 拉普拉斯方程的柱对称(或圆对称)解, 即与 φ、z 无关仅由 ρ 确定的解 $u=U(\rho)$ 将由下列常微分方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right)=0$$

定出. 解出这个方程后得出

$$U=C_1\ln\rho+C_2$$

C_1、C_2 为任意常数. 取 $C_1=-1, C_2=0$, 则得出函数

$$U=\ln\frac{1}{\rho} \tag{5.1.8}$$

可代入验证 $\Delta\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)=0(\rho\neq 0)$. 通常我们称函数(5.1.8)为平面拉普拉斯方程的基本解.

函数 (5.1.7) 有简单的物理意义: 除了比例因子不计外, $U=\frac{1}{r}$ 与放在坐标原点的电荷 e 的电场所产生的电位势

$$u=\frac{e}{r} \tag{5.1.9}$$

相同. 类似地, 函数(5.1.8)除了比例因子不计外, $U=\ln\frac{1}{\rho}$ 与放在原点的点电荷 e_1 的电场所产生的电位势

$$u=2e_1\ln\frac{1}{\rho} \tag{5.1.10}$$

相同，其中 e_1 是按单位长度计算的电荷密度.

§5-2 格林公式 调和函数性质

为了建立拉普拉斯方程与泊松方程解的积分表达式，需要先推导出格林公式.

1 格林公式

在建立格林公式时，需要先介绍线面积分中的**奥氏公式**：设 Ω 是以充分光滑的曲面 Γ 为边界的有界区域，$P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$ 在 $\Omega+\Gamma$ 上连续，在 Ω 内具有一阶连续的偏导数，则成立如下的奥氏公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\iint_{\Gamma}[P\cos(n, x)+Q\cos(n, y)+R\cos(n, z)]d\sigma$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 Γ 的外法线向量．令 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}=\cos(n, x)\boldsymbol{i}+\cos(n, y)\boldsymbol{j}+\cos(n, z)\boldsymbol{k}$, 奥氏公式可写成为

$$\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{A}dV=\iint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (d\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}d\sigma) \tag{5.2.1}$$

以下推导格林公式.

设 $u(x, y, z)$, $U(x, y, z)$在区域 $\Omega+\Gamma$ 上具有连续一阶偏导数，而在 Ω 中具有连续二阶偏导数．在(5.2.1)中令 $\boldsymbol{A}=u\nabla v$, 就得出

$$\iint_{\Gamma}u\nabla v\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot(u\nabla v)dV$$

$$=\iiint_{\Omega}u\Delta v dV+\iiint_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v dV \tag{5.2.2}$$

(5.2.2)称为**第一格林公式**.

在(5.2.2)中交换 u、v 位置，则得出

$$\iint_{\Gamma} v\nabla u\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot(v\nabla u)dV=\iiint_{\Omega}v\Delta u dV+\iiint_{\Omega}\nabla v\cdot\nabla u dV \tag{5.2.3}$$

(5.2.2)减去(5.2.3)，则得出

$$\iint_{\Gamma}(u\nabla v-v\nabla u)\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)dV \tag{5.2.4}$$

(5.2.4)称为**第二格林公式.**

上述格林公式中的区域Ω可能是以几个曲面为界的，在这种情况下，运用格林公式时，只需将这个公式左边的曲面积分沿着区域Ω的界面的所有曲面Γ来取. 很自然，对于曲面Γ也必须有一些要求，这些条件可以叙述如下：曲面Γ可以分为有限多块，使得在每块和它的边界线都有连续变化的切平面. 这样的曲面通常称为**逐块平滑的**. 所说的曲面块的边界线称为**曲面的棱**，应该是逐段光滑的曲线.

从格林公式出发，可以推出一个在应用中很重要的公式，即格林第三公式，它给出在Ω内任何点M_0的函数值的表达式，这个表达式是一个曲面积分与一个体积分之和. 以下导出这个表达式.

设M_0是Ω内任意一个定点. $u(x,y,z)$满足前述条件，$v(M)=\dfrac{1}{r_{MM_0}}$. 显然当变点$M(x,y,z)$重合于M_0时$v=\infty$，格林公式(5.2.4)失去了意义. 为此，今以M_0为中心，ε为半径作球面Γ_ε，将Γ_ε所围成的球体积K_ε从Ω中挖出，如图5-1. 对剩下来的区域$\Omega-K_\varepsilon$，格林公式(5.2.4)能够应用到函数$u(x,y,z)$与$v(M)$

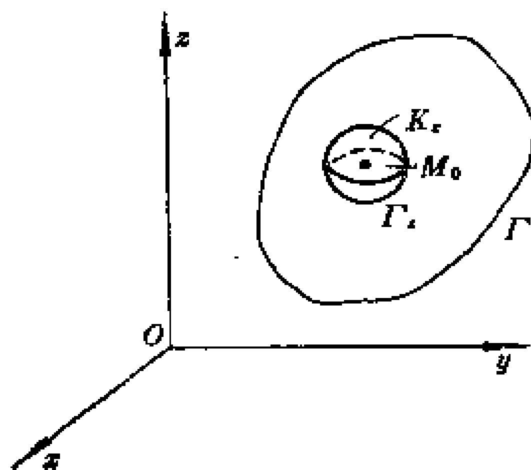


图 5-1

$=\frac{1}{r_{MM_0}}$. 于是

$$
\iiint\limits_{\Omega-K_\varepsilon}\left[u(M)\Delta_M\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)-\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta_M u(M)\right]dV_M
$$

$$
=\iint\limits_{\Gamma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n_M}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)-\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n_M}\right]d\sigma_M+
$$

$$
+\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n_M}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)-\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n_M}\right]d\sigma_M \qquad (5.2.5)
$$

上式中M着重表明微分或积分运算是对变量M进行的，M_0是参变量. 令$\varepsilon\to 0$，因为$\Delta_M\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)=0$，所以(5.2.5)左端趋向于

$$
\iiint\limits_{\Omega}\left(-\frac{1}{r}\Delta u\right)dV
$$

右端Γ_ε上的面积分应分为两项考虑：前一项

$$
\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma=-\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma
$$

$$
=\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon}u\frac{1}{r^2}d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon}u\,d\sigma=4\pi\bar{u}\xrightarrow[(\varepsilon\to 0)]{}4\pi u(M_0)
$$

其中$\bar{u}$表示u在Γ_ε上的平均值. 后一项

$$
-\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=-\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=-4\pi\varepsilon\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}\longrightarrow 0 \quad (\varepsilon\to 0)
$$

式中$\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}$表示$\frac{\partial u}{\partial n}$在$\Gamma_\varepsilon$上的平均值. 于是(5.2.5)可以写为

$$
\iiint\limits_{\Omega}\left(-\frac{1}{r}\Delta u\right)dV=\iint\limits_{\Gamma}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma+4\pi u(M_0)
$$

所以

$$
u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\sigma
$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{r}\Delta u\right)dV \tag{5.2.6}$$

(5.2.6)称为第三格林公式。

2 调和函数性质

从已经获得的三个格林公式，容易得到调和函数的一些基本性质：

性质 1 设 $u(x,y,z)$ 是区域 Ω 上的调和函数，则有

$$\iint\limits_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=0 \tag{5.2.7}$$

其中 n 是沿 Ω 的边界面 Γ 的外法线方向。

证明 设 u 为具有边界面 Γ 的有界区域 Ω 上的调和函数。另取 $v\equiv1$。由于 $\Delta u=0$, $\Delta(1)=0$, $\frac{\partial(1)}{\partial n}=0$，运用第二格林公式(5.2.4)，就得到

$$\iint\limits_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=0$$

这公式(5.2.7)表明：调和函数的法线方向导数沿区域 Ω 的边界面 Γ 上的积分等于零。

从(5.2.7)得出牛曼问题：

$$\begin{cases}\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0\\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\varphi\end{cases}$$

有解的必要条件为 φ 满足条件

$$\iint\limits_{\Gamma}\varphi d\sigma=0$$

性质 2 设 $u(x,y,z)$ 是区域 Ω 上的调和函数，则有

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\sigma \qquad (5.2.8)$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是沿 Ω 的边界面 Γ 的外法线方向.

证明 运用第三格林公式(5.2.6) 于调和函数 $u(x,y,t)$ 上，因为 $\Delta u=0$，就得到(5.2.8)式

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\sigma$$

这公式(5.2.8)表明：调和函数在区域内任何点的值，都可以由公式(5.2.8) 通过函数在区域的边界面上的值以及法线方向导数值表达.

性质 3 设 $u(x,y,z)$ 是区域 Ω 上的调和函数，则 $u(x,y,z)$ 在球心的值等于它在球面上的算术平均值，即

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Gamma_R}u(M)d\sigma \qquad (5.2.9)$$

其中 Γ_R 是以 M_0 为球心 R 为半径的球面，且 Γ_R 完全落在 Ω 中.

证明 因为 u 是调和函数，所以(5.2.8)式成立. 又因向外的法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向与球的半径的方向相同，于是我们有

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}$$

从而(5.2.8)式变成为

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{\Gamma_R}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma_R}\frac{u}{r^2}d\sigma$$

运用(5.2.7)后得出

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Gamma_R}u(M)d\sigma$$

(5.2.9)称为调和函数的**平均值公式**. 这个公式(5.2.9) 表明：调和函数在球心的值等于这个函数在球面上的算术平均值，就是说，

等于函数值沿球面的积分除以这个球面的面积.

性质 4 假设 $u(M)$ 在有界区域 Ω 内是调和函数，在闭区域 $\Omega+\Gamma$ 上为连续，若 $u(M)$ 不为常数，则 $u(M)$ 的最大值和最小值只能在边界面 Γ 上达到.

下面给出这一性质的证明.

用反证法证明. 从假设条件可知 $u(M)$ 的最大值和最小值都存在，以下只需要证明 $u(M)$ 的最大值和最小值只能在边界面 Γ 上达到.

如果 $u(M)$ 在区域 Ω 内的某一点 M_0 达到最大值 m，即 $u(M_0)=m$，我们来引出矛盾. 以 M_0 为球心，任意半径 R 作球 K，使它完全落在区域 Ω 中，记 K 的球面为 S_K，则在 S_K 上必成立 $u\equiv m$. 事实上，如果 u 在球面 S_K 上某一点其值小于 m，则由函数的连续性，必可找到此点在球面 S_K 上的一个邻域，在此邻域中 $u<m$，因此 u 在 S_K 上的积分平均值

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_K} u d\sigma < \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_K} m d\sigma = m$$

但由平均值公式(5.2.9)，有

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_K} u d\sigma = u(M_0) = m$$

这就发生了矛盾. 因此在球面 S_K 上，u 恒等于常数 m. 同理，在以 M_0 为中心，任意 $r(r\leqslant R)$ 为半径的球面上，u 也恒等于常数 m，因此，在整个球 K 中 u 恒等于常数 m.

现在证明对 Ω 中的所有点都成立 $u\equiv$ 常数 m. 任取一点 $P\in\Omega$，在区域 Ω 中作联接 M_0, P 两点的折线 γ，再用完全落在 Ω 中的有限个球 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 盖住 γ，使得 K_1 的球心为 M_0，K_2 的球心落在 K_1 中，K_3 的球心落在 K_2 中，$\cdots$，K_n 的球心落在 K_{n-1} 中，如图 5-2. 根据上面证明过的方法，可以依次证明在所有这些

球所包围的区域上 $u\equiv$常数 m，因此，特别有 $u(P)\equiv$常数 m．由于 P 的任意性，就得到在整个区域 Ω 内 $u(x,y,z)\equiv m$．这和 u 不恒等于常数相矛盾．因此 u 不能在 Ω 内部达到最大值．

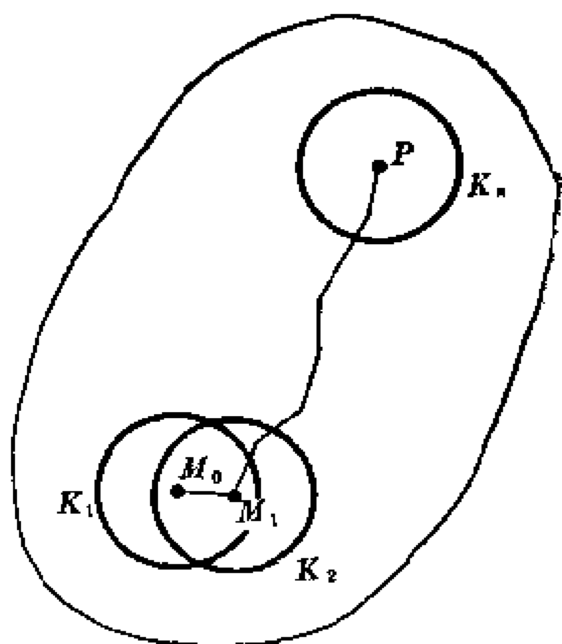


图 5-2

因为 $-u$ 也是调和函数，从它在 Ω 的内部不能达到最大值．得出 u 也不能在 Ω 内部达到最小值．证毕．

通常称性质 4 为调和函数的**极值原理**，或者叫做**最大值原理**．从这条性质出发，可以得出下述重要推论．

推论 1 设在有界区域 Ω 内的调和函数，在闭区域 $\Omega+\Gamma$ 上为连续，如果还在 Ω 的边界面 Γ 上为常数 K，则它在 Ω 内各点的值也等于常数 K．

证明 由性质 4 可知，u 的最大值与最小值都在 Γ 上取得，所以 $m\leqslant u\leqslant M$（m 和 M 分别为 u 的最小值与最大值），由假设知 $m=M=K$，从而 $u\equiv K$．

推论 2 设在有界区域 Ω 内的调和函数，在闭区域 $\Omega+\Gamma$ 上为连续，如果还在 Ω 的边界面 Γ 上恒为零，则它在 Ω 内各点处的值都等于零．

证明 由推论 1 可知，当 $K=0$ 时，就得到了证明．

推论 3 设在有界区域 Ω 内的两个调和函数，在闭区域 $\Omega+\Gamma$ 上为连续，如果它们还在区域 Ω 的边界面 Γ 上取相等的值，则它们在 Ω 内所取的值也彼此相等．

证明 因为差值 $u-v$ 在 Ω 内为调和函数，由于在 Γ 上 $u-v$

$\equiv 0$，由推论 2 可知，在 Ω 内 $u-v\equiv 0$，所以在 Ω 内 $u\equiv v$。

§5-3 狄利克莱问题和牛曼问题解的唯一性与稳定性

到目前为止，在定解问题的讨论中，我们着重讨论了定解问题的解如何求法。为了对解的适定性有初步的了解，在这节里我们对狄利克莱问题与牛曼问题的唯一性与稳定性加以讨论。为此，首先对解的稳定性给出确切的定义。

定义 设定解问题由边界条件 φ_1 得到的解为 u_1，由边界条件 φ_2 得到的解为 u_2，如果在所讨论的区域中，对于任给的 $\varepsilon>0$，一定可以找到 $\delta>0$，使得当 $|\varphi_1-\varphi_2|<\delta$ 时，$|u_1-u_2|<\varepsilon$，则称解在普通意义下对边界条件是稳定的。用通俗的说法，就是附加条件的微小变化，只引起解在所讨论的区域中也发生微小变化。

定理 1 方程 $\Delta u=0$ 的狄利克莱问题的解是唯一的，而且它连续依赖于所给的边界条件，即对边界条件是稳定的。

证明 先证唯一性，设 u_1、u_2 都是狄利克莱问题的解，即 u_1、u_2 分别满足定解问题

$$\begin{cases}\Delta u_1=0\\ u_1|_\Gamma=\varphi,\end{cases}\qquad \begin{cases}\Delta u_2=0\\ u_2|_\Gamma=\varphi\end{cases}$$

从而 $u=u_1-u_2$ 也满足定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=\Delta(u_1-u_2)=0\\ u|_\Gamma=(u_1-u_2)|_\Gamma=0\end{cases}$$

由 §5-2 中的推论 2 可知，u_1-u_2 在边界 Γ 所围成的区域 Ω 内恒等于零，所以 $u_1\equiv u_2$，这就证明了解的唯一性。

其次证明稳定性，设在区域 Ω 的边界 Γ 上给定了函数 φ、φ^*，而且在 Γ 上处处有

$$|\varphi-\varphi^*|<\varepsilon,\qquad -\varepsilon<\varphi-\varphi^*<\varepsilon,\ \varepsilon>0 \text{ 是任意的。}$$

u, u^* 是定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_\Gamma=\varphi\end{cases},\quad \begin{cases}\Delta u^*=0\\ u^*|_\Gamma=\varphi^*\end{cases}$$

的解．那末调和函数 $u-u^*$ 在 Γ 上取值应为 $\varphi-\varphi^*$，于是由 §5-2 中性质 4 可知，在 Ω 内各点有

$$-\varepsilon<u-u^*<\varepsilon$$

从而

$$|u-u^*|<\varepsilon$$

这就证明了解的稳定性．

类似地，可建立起泊松方程的狄利克莱问题的解的唯一性与解对边界条件的稳定性．

定理 2 方程 $\Delta u=0$ 的牛曼问题的解，若不管任意常数的差别，也仍然是唯一的．

证明 设 u_1、u_2 是 $\Delta u=0$ 的牛曼问题的两个解，即 u_1、u_2 分别满足定解问题

$$\begin{cases}\Delta u_1=0\\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial n}\right|_\Gamma=\varphi,\end{cases}\quad \begin{cases}\Delta u_2=0\\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial n}\right|_\Gamma=\varphi\end{cases}$$

从而 $u=u_1-u_2$ 也是定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=\Delta(u_1-u_2)=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=\left.\dfrac{\partial(u_1-u_2)}{\partial n}\right|_\Gamma=0\end{cases}$$

的解．在(5.2.2)中取 $u=v=u_1-u_2$，由于 $\Delta u=\Delta(u_1-u_2)=0$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=\left.\dfrac{\partial(u_1-u_2)}{\partial n}\right|_\Gamma=0$，得出

$$\iiint\limits_\Omega\left[\left(\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial z}\right)^2\right]dV=0$$

从 u_1-u_2 及其一阶偏导数的连续性，得出

$$\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x}=\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}=\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial z}=0$$

所以，$v=u_1-u_2\equiv C$，C 为常数．唯一性证完．

类似地，可建立起泊松方程的牛曼问题的解的唯一性，当然也是指不管任意常数的差别．

至于牛曼问题解的稳定性，显然是不会成立的．这是因为对于不同的边界条件 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=\varphi_1$ 与 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=\varphi_2$，由定理 2 可知，所对应的解分别为 u_1+C_1，u_2+C_2，由于 $u_1+C_1-(u_2+C_2)=C_1-C_2$，所以，当 $|\varphi_1-\varphi_2|<\varepsilon$ 时，不可能使 $|C_1-C_2|<\varepsilon$．故牛曼问题的解对边界条件是不稳定的．

§5-4 格 林 函 数

1 格林函数

从 §5-2 讨论过的(5.2.8)得知，拉普拉斯方程

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 \tag{5.4.1}$$

的解完全由它的边界面 Γ 上的条件

$$u|_\Gamma=\varphi(M) \tag{5.4.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=\psi(M) \tag{5.4.3}$$

所唯一确定．同样，如设格林第三公式(5.2.6)中的 u 为泊松方程

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=-f(x,y,z) \tag{5.4.4}$$

的解，则我们仍然得知，解 u 也是完全由它的边界面 Γ 上的条件(5.4.2)与(5.4.3)所唯一确定．

设 u 是拉普拉斯方程(5.4.1)的解，则由(5.2.8)推出

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\left[\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n_M}-u(M)\frac{\partial}{\partial n_M}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right]d\sigma_M \tag{5.4.5}$$

如果 u 是泊松方程(5.3.4)的解,则由(5.2.6)推出

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\left[\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n_M}-u(M)\frac{\partial}{\partial n_M}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right]d\sigma_M+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{f(M)}{r_{MM_0}}dV_M \tag{5.4.6}$$

从(5.4.5)与(5.4.6)可以看出,只要已知(5.4.2)与(5.4.3),就可计算出它们在区域 Ω 内任一点 M_0 的值. 然而在求得(5.4.1)与(5.4.4)的第一或者第二边值问题的解中,已知的是(5.4.2)或者(5.4.3),并非两者都是知道的. 因此,(5.4.5)、(5.4.6)不足以解决拉普拉斯方程(5.4.1)或泊松方程(5.4.4)的边值问题,这就迫使我们将它们加以修改.

设有某个(尚待确定的)$v(M)$ 为 Ω 中的调和函数(在 Ω 中无奇点),u 为拉普拉斯方程(5.4.1),或者泊松方程(5.4.4)的解,那末运用格林公式(5.2.4)于这样的 u、v 上,立即推出

$$0=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma_M \tag{5.4.7}$$

或者

$$0=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma_M+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}vf\,dV_M \tag{5.4.8}$$

将(5.4.7)加到(5.4.5)上,(5.4.8)加到(5.4.6)上,得出

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\left[G(M,M_0)\frac{\partial u(M)}{\partial n_M}-u(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n_M}\right]d\sigma_M \tag{5.4.9}$$

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\left[G(M,M_0)\frac{\partial u(M)}{\partial n_M}-u(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n_M}\right]d\sigma_M$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}G(M,M_0)f(M)dV_M \tag{5.4.10}$$

其中

$$G(M,M_0)=v(M)+\frac{1}{r_{MM_0}} \tag{5.4.11}$$

$v(M)$于Ω内处处为调和的函数，

$$\frac{1}{r_{MM_0}}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

除了点$M_0(x_0,y_0,z_0)$外于Ω内也处处为调和函数。

为了求出$u(M_0)$，我们给出下述定义。

定义 称满足下述条件的$G(M,M_0)$为区域Ω上的**格林函数**：

(1) $G(M,M_0)$在Ω内部除$M=M_0$外满足拉普拉斯方程，即$\Delta G(M,M_0)=0$，但在$M=M_0$点处$G(M,M_0)$有形如$\frac{1}{r_{MM_0}}$的奇点.

(2) $G(M,M_0)=v(M)+\frac{1}{r_{MM_0}}$，

其中 $r_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，$\Delta v=0$.

2 狄利克莱问题的解

如果适当的选择$v(M)$，使

$$G(M,M_0)|_\Gamma=\left[v(M)+\frac{1}{r_{MM_0}}\right]\Bigg|_\Gamma=0 \tag{5.4.12}$$

即取$v(M)$为拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta v=v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}=0\\ v|_\Gamma=-\dfrac{1}{r_{MM_0}}\Bigg|_\Gamma\end{cases} \tag{5.4.13}$$

的解，那末，(5.4.9)与(5.4.10)就变成为

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\varphi(M)\frac{\partial}{\partial n_M}G(M, M_0)d\sigma_M \tag{5.4.14}$$

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\varphi(M)\frac{\partial}{\partial n_M}G(M, M_0)d\sigma_M + \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}G(M, M_0)f(M)dV_M \tag{5.4.15}$$

其中已运用了边界条件(5.4.2). 公式(5.4.14),(5.4.15)分别给出了拉普拉斯方程(5.4.1),泊松方程(5.4.4)在边值条件(5.4.2)下的解,即第一边值问题的解的表达式.

由(5.4.12)、(5.4.13)确定的 $G(M, M_0)$ 具有下述性质:

(1) $G(M, M_0)$ 在 Ω 内部除 $M=M_0$ 外满足拉普拉斯方程,即 $\Delta G(M, M_0)=0$,但在 $M=M_0$ 点处有形如 $\frac{1}{r_{MM_0}}$ 的奇点.

(2) $G(M, M_0)=v(M)+\frac{1}{r_{MM_0}}$,其中

$$r_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}, \quad \Delta v=0.$$

(3) $G(M, M_0)|_{\Gamma}=0$.

这样的函数 $G(M, M_0)$ 称为拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 的第一边值问题的格林函数.

关于牛曼问题的解与其相应的格林函数,读者比较容易地仿照刚才讨论的方法得到解决,此处就省略了.

3 二点说明

关于格林函数 $G(M, M_0)$ [(5.4.11)],还有一个重要性质,即对称性:

$$G(M_1, M_2)=G(M_2, M_1) \tag{5.4.16}$$

这一等式的物理意义是比较明显的. 因为在导体内部,把原放在 M_1 的单位正电荷移到 M_2 点上去,它在 M_1 点所产生的电势,仍

与原来单位正电荷放在 M_1 点上，它在 M_2 点所产生的电势完全相同。

(5.4.16)式的数学证明如下：以 M_1、M_2 为中心，作半径为 ε 的球 K_1、K_2，其边界面分别记为 Γ_1、Γ_2。令 $u=G(M, M_1)$，$v=G(M,M_2)$，在区域 $\Omega-K_1-K_2$ 上，由格林第二公式得出

$$\iiint\limits_{\Omega-K_1-K_2}(u\Delta v-v\Delta u)\,dV=\iint\limits_{\Gamma+\Gamma_1+\Gamma_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma \tag{5.4.17}$$

其中 $\Gamma+\Gamma_1+\Gamma_2$ 是区域 $\Omega-K_1-K_2$ 的边界面。注意到在区域 $\Omega-K_1-K_2$ 上 u、v 是调和函数，所以 $\Delta u=\Delta v=0$。又在 Γ 上 $u=v=0$。由此得出

$$\iint\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2}\left[G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial n}-G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial n}\right]d\sigma=0 \tag{5.4.18}$$

注意到对边界面 Γ_1，类似于推导(5.2.6)的方法，当 $\varepsilon\to0$ 时，有

$$\begin{cases}\displaystyle\iint\limits_{\Gamma_1}G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial n}d\sigma\to0\\ \displaystyle\iint\limits_{\Gamma_1}G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial n}d\sigma\to4\pi G(M_1,M_2)\end{cases} \tag{5.4.19}$$

同理，对边界面 Γ_2，类似于推导(5.2.6)的方法，当 $\varepsilon\to0$ 时，有

$$\begin{cases}\displaystyle\iint\limits_{\Gamma_2}G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial n}d\sigma\longrightarrow4\pi G(M_2,M_1)\\ \displaystyle\iint\limits_{\Gamma_2}G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial n}d\sigma\longrightarrow0\end{cases} \tag{5.4.20}$$

将(5.4.19)、(5.4.20)代入(5.4.18)中，整理后就得出 $G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1)$。

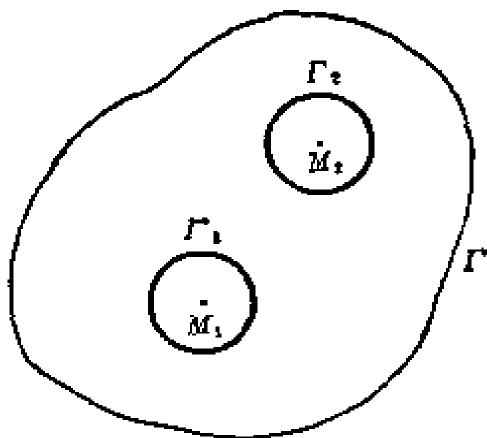


图 5-3

我们还对格林函数 $G(M,M_0)$ 的选择作恰当的说明。从(5.4.13)已经看到，找 $G(M,M_0)$ 的问题变成了求 $v(M)$ 的问题，然而

求 $v(M)$ 也不是一件容易的事. 即使这样，解式(5.4.14)、(5.4.15)仍有重要意义，这因为：(1)格林函数 $G(M, M_0)$ 仅依赖于区域，而与边界条件无关，只要求得了区域 Ω 的格林函数，解式就具体化了.(2)对于一些特殊区域，如球与半空间，圆与半平面等，格林函数都可用简单方法求得(参看§5-5)，而一般场合下要求解(5.4.13)，总比原来的边值问题要简单些.

类似于前面的三维空间中格林函数的讨论，关于二维空间的情况，取基本解 $\ln\frac{1}{r_{MM_0}}$ $(r_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$ 代替 $\frac{1}{r_{MM_0}}$ $\left(r_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right)$. 同理得出二维空间中区域 D 上的格林函数 $G(M, M_0)$ 有性质:

(1) $G(M, M_0)$ 在 D 内部除 $M=M_0$ 外满足拉普拉斯方程，$\Delta G(M, M_0)=0$，但在 $M=M_0$ 点处 $G(M, M_0)$ 有形如 $\ln\frac{1}{r_{MM_0}}$ 的奇点.

(2) $G(M, M_0)=v(M)+\ln\frac{1}{r_{MM_0}}$,

其中 $$r_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\ \Delta v=0.$$

进一步，如果 $G(M, M_0)$ 为区域 D 上的格林函数，在区域 D 的边界 L 上有 $G(M, M_0)=0$，则称这样的 $G(M, M_0)$ 为平面拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 的第一边值问题的格林函数. 此时，就得出平面拉普拉斯方程与泊松方程狄利克莱问题的解的表达式为:

$$u(M_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_L \varphi(M)\frac{\partial}{\partial n_M}G(M, M_0)dS_M \tag{5.4.21}$$

与

$$u(M_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_L \varphi(M)\frac{\partial}{\partial n_M}G(M, M_0)dS_M$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint_D G(M, M_0)f(M)d\sigma_M \qquad (5.4.22)$$

其中 $u|_L=\varphi$ 为已知的边界条件.

§5-5 几种特殊区域上的格林函数狄利克莱问题的解

从(5.4.14)、(5.4.15)解的表达式可以看出,狄利克莱问题的求解问题的关键在于如何求出格林函数 $G(M, M_0)$.

对于某些特殊的区域,它的格林函数可以用静电源象法求得.所谓**静电源象法**就是:设在区域Ω内的M_0处有一个单位正电荷,它对自由空间的电场就产生一个正电位,另外,在区域Ω外找出M_0关于边界Γ的象点,然后在这个象点放置适当的负电荷,由它对自由空间的电场就产生一个负电位,使得正负电位在边界面Γ上互相抵消,此时这两种电荷所形成的电场在Γ内的电位就相当于所要求的格林函数.下面举例说明静电源象法的应用.

1 球和半空间上的格林函数

设有一球心在原点,半径为R的球面Γ.在球内任取一点M_0 $(r_{OM_0}=r_0)$,连OM_0并延长至M_1使$r_{OM_0}\cdot r_{OM_1}=R^2$,点$M_1$就是$M_0$关于球面$\Gamma$的象点,如图5-4.在$M_0$放置单位正电荷,在$M_1$

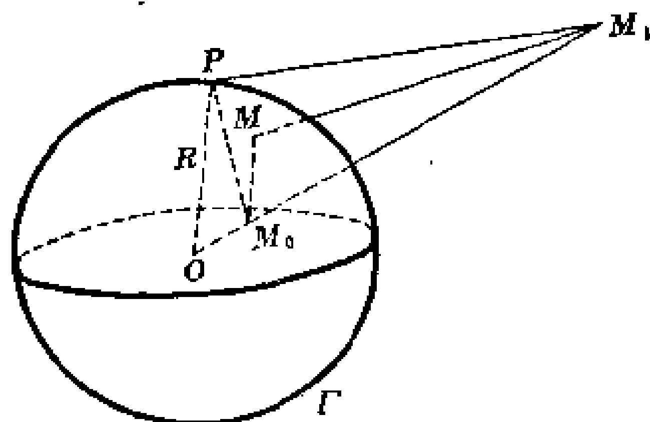


图 5-4

放置$\frac{R}{r_0}$单位负电荷，则这两个电荷所产生的电位在球面Γ上相互抵消.

事实上，设P是球面Γ上任意一点，考虑三角形OM_1P与OM_0P，由于在点O它们有公共角，且夹这角的两边成比例$\frac{r_0}{R}=\frac{R}{r_1}$，$r_1=r_{OM_1}$，因此，这两个三角形是相似的，从而有$\frac{r_{PM_1}}{r_{PM_0}}=\frac{R}{r_0}$，即$\frac{1}{r_{PM_0}}=\frac{R}{r_0}\frac{1}{r_{PM_1}}$. 当$P$点换成球内的点$M$，正负电荷在$M$点所产生的电位为

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{R}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right)$$

这电位在球面Γ上为零. 从而，球域上的格林函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{R}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}} \tag{5.5.1}$$

读者很容易验证(5.5.1)满足第一边值问题格林函数的三个条件.

现在利用(5.5.1)式求球域内狄利克莱问题的解. 为此，还必须先计算$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Gamma$. 注意到

$$\frac{1}{r_{MM_0}}=\frac{1}{\sqrt{r_0^2+r^2-2r_0r\cos\gamma}},$$

$$\frac{1}{r_{MM_1}}=\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r^2-2r_1r\cos\gamma}}$$

其中$r=r_{OM}$，γ是$\overrightarrow{OM_0}$与$\overrightarrow{OM}$的夹角(当然γ也是$\overrightarrow{OM_1}$与$\overrightarrow{OM}$的夹角)，利用$r_0\cdot r_1=R^2$，得到格林函数(5.5.1)为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{\sqrt{r_0^2+r^2-2r_0r\cos\gamma}}-\frac{R}{\sqrt{r^2r_0^2-2R^2rr_0\cos\gamma+R^4}}$$

在球面Γ上，有

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{r=R}=\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R}=-\left\{\frac{r-r_0\cos\gamma}{(r^2+r_0^2-2r_0r\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left.-\frac{(r_0^2r-R^2r_0\cos\gamma)R}{(r_0^2r^2-2R^2rr_0\cos\gamma+R^4)^{\frac{3}{2}}}\right\}_{r=R}$$

$$=-\frac{1}{R}\frac{R^2-r_0^2}{(R^2+r_0^2-2Rr_0r\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

因此，将这个结果代入(5.4.14)，得到了方程(5.4.1)在球域上的狄利克莱问题$u|_\Gamma=f$的解的表达式

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_\Gamma\frac{R^2-r_0^2}{(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}f(M)d\sigma_M \tag{5.5.2}$$

或写为球坐标形式

$$u(r_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{R}{4\pi}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^\pi f(R,\theta,\varphi)\frac{R^2-r_0^2}{(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta d\theta d\varphi \tag{5.5.2'}$$

其中(r_0,θ_0,φ_0)是点M_0的坐标，(R,θ,φ)是球面Γ上的点P的坐标，而

$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cdot\cos(\varphi-\varphi_0)$，$(\sin\theta_0\cos\varphi_0,\sin\theta_0\sin\varphi_0,\cos\theta_0)$与$(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$分别为向量$\overrightarrow{OM_0}$，$\overrightarrow{OM}$的方向余弦。公式(5.5.2)或(5.5.2′)称为球的泊松公式。

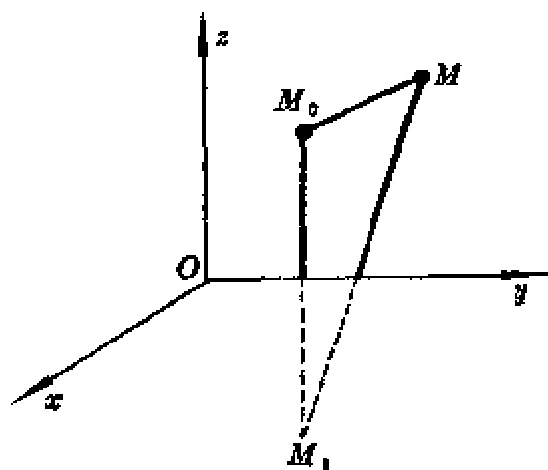


图 5-5

类似地，可以用静电源象法求解半空间$z>0$上拉普拉斯方程

的狄利克莱问题．首先找出格林函数 $G(M,M_0)$．于上半空间中取 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点，置单位正电荷．它的象点在 $M_1(x_0,y_0,-z_0)$，具有单位负电荷，如图 5-5．由此所求的格林函数为

$$
\begin{aligned}
G(M,M_0)&=\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_1}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\\
&\quad-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}
\end{aligned}
\tag{5.5.3}
$$

读者很容易验证(5.5.3)满足第一边值问题格林函数的三个条件．

现在，对于半空间 $z>0$，边界面 $z=0$ 的外法线方向与 z 轴相反，即 $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial z}$．所以

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma}&=-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]_{z=0}\\
&=-\frac{2z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

因此，将这个结果代入(5.4.14)，得到了方程(5.4.1)在半空间 $z>0$ 上的狄利克莱问题 $u|_{z=0}=f$ 的解的表达式①

$$
\begin{aligned}
&u(x_0,y_0,z_0)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{\frac{3}{2}}}f(x,y)\,dx\,dy
\end{aligned}
\tag{5.5.4}
$$

① 这里 $z>0$ 为无限区域，只要调和函数 $u(M)$ 在无穷远处还满足条件：当 $r_{OM}\longrightarrow\infty$ 时，$u(M)=O\left(\frac{1}{r_{OM}}\right)$，$\frac{\partial u}{\partial n}=O\left(\frac{1}{r_{OM}^2}\right)$，则公式(5.4.14)对于包含无穷远点的区域仍成立．

2 圆和半平面上的格林函数

首先找圆域上的格林函数. 设有一圆心在原点, 半径为 R 的圆周 L. 于圆(其实是圆柱)内的 M_0 点(其实是细线), 放置半单位正电荷(其实是每单位长有半单位正电荷). 在 OM_0 的延长线上 M_1 点($r_1=r_{OM_1}=R^2/r_0$, $r_0=r_{OM_0}$)放置半单位负电荷, 如图 5-6. 则电位势

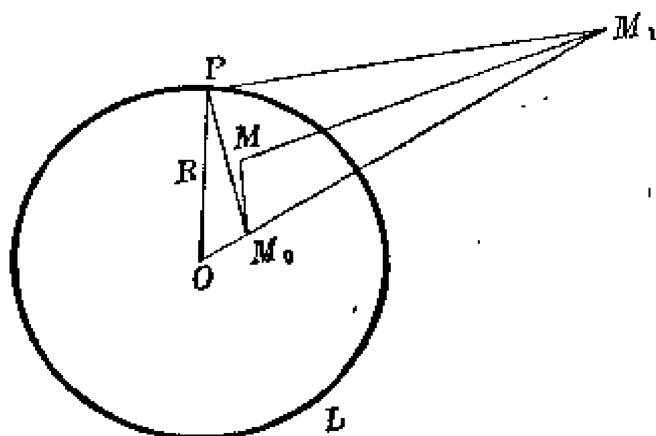


图 5-6

$$v=\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\ln\frac{1}{r_{MM_1}}=\ln\frac{r_{MM_1}}{r_{MM_0}}$$

于圆周 L 上,

$$v\big|_L=\ln\frac{r_{MM_1}}{r_{MM_0}}\bigg|_L=\ln\frac{R}{r_0}$$

虽不是零, 却是常数. 因此 v 还不是格林函数, 它减去 $\ln(R/r_0)$ 之后就是圆域上的格林函数:

$$\begin{aligned}G(M,M_0)&=\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\ln\frac{1}{r_{MM_1}}-\ln\frac{R}{r_0}\\&=\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\ln\left(\frac{R}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right)\end{aligned}\qquad(5.5.5)$$

读者很容易验证(5.5.5) 满足平面第一边值问题格林函数的三个条件.

现在利用(5.4.21)式求圆域内狄利克莱问题的解. 为此, 还

必须先计算$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma}$. 注意到

$$\frac{1}{r_{MM_0}}=\frac{1}{\sqrt{r_0^2+r^2-2r_0r\cos\gamma}},$$

$$\frac{1}{r_{MM_1}}=\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r^2-2r_1r\cos\gamma}}$$

其中γ是$\overrightarrow{OM_0}$与$\overrightarrow{OM}$的夹角. 因为在平面情况时,$\overrightarrow{OM_0}$, $\overrightarrow{OM}$的方向余弦分别为$(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$与$(\cos\theta, \sin\theta)$, 所以

$$\cos\gamma=\cos\theta_0\cos\theta+\sin\theta_0\cdot\sin\theta=\cos(\theta_0-\theta)$$

利用$r_0\cdot r_1=R^2$, 可得出在圆周$r=R$上有

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_L=\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R}=\frac{\partial}{\partial r}\left\{\ln\frac{1}{\sqrt{r_0^2+r^2-2r_0r\cos\gamma}}\right.$$

$$\left.-\ln\frac{R}{\sqrt{r_0^2r^2-2R^2r_0r\cos\gamma+R^4}}\right\}_{r=R}$$

$$=-\left\{\frac{r-r_0\cos\gamma}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}-\frac{r_0^2r-R^2r_0\cos\gamma}{r_0^2r^2-2R^2r_0r\cos\gamma+R^4}\right\}_{r=R}$$

$$=-\frac{1}{R}\,\frac{R^2-r_0^2}{R^2-2Rr_0\cos\gamma+r_0^2}$$

因此, 将这个结果代入(5. 4. 21)中, 得到了方程$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$在圆域上的狄利克莱问题$u|_L=f$的解的表达式

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{R^2-r_0^2}{R^2-2Rr_0\cos\gamma+r_0^2}f(M)ds \qquad (5.5.6)$$

或写成极坐标形式

$$u(r_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r_0^2)f(\theta)}{R^2-2Rr_0\cos(\theta-\theta_0)+r_0^2}d\theta \qquad (5.5.6')$$

其中(r_0, θ_0)是点M_0的坐标, (R, θ)是圆周L上的点P的坐标. 公式(5. 5. 6)或(5. 5. 6′)称为**圆的泊松公式.**

类似于半空间情况, 可以用静电源象法求解半平面$y>0$上拉普拉斯方程的狄利克莱问题. 于上半平面取$M_0(x_0, y_0)$点, 它的

象点 $M_1(x_0, -y_0)$，又 $M(x,y)$，如图 5-7. 此时，容易求出上半平面 $y>0$ 上第一边值问题的格林函数 $G(M, M_0)$ 为

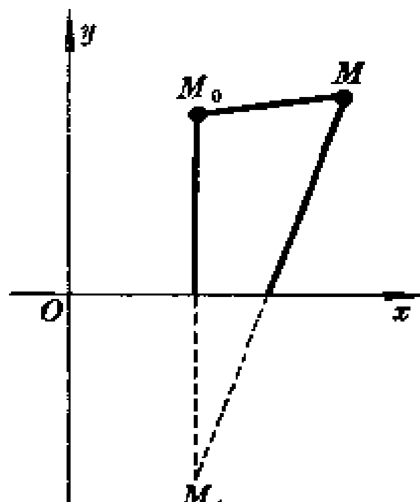


图 5-7

$$G(M, M_0)=\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\ln\frac{1}{r_{MM_1}} \qquad (5.5.7)$$

又 $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial y}$，所以

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_L=-\frac{\partial}{\partial y}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right.$$
$$\left.\left.-\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}\right]\right|_{y=0}$$
$$=-\frac{2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

将这个结果代入 (5.4.21)，得到了方程 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$ 在上半平面上的狄利克莱问题 $u|_L=f$ 的解的表达式

$$u(x_0, y_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}f(x)dx \qquad (5.5.8)$$

最后还指出，利用 1 与 2 段的格林函数，读者不难从(5.4.15)式写出泊松方程的狄利克莱问题的解的表达式.

第五章 习 题

1 验证 $u=\ln\frac{1}{r}\left(r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$ 与

$$u=\frac{1}{r}\left(r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right)$$

分别是二维、三维拉普拉斯方程的解(称为**基本解**).

2 设 D 是以光滑曲线 L 为边界的有界区域，函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 以及它们所有的一阶偏导数在闭区域 $D+L$ 上连续，在区域 D 内有二阶连续偏导数. 试证明平面上第一、第二、第三格林公式

(1) $\int_L u\frac{\partial v}{\partial n}dS = \iint_D u\Delta v d\sigma + \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\sigma$

(2) $\int_L \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS = \iint_D (u\Delta v - v\Delta u)\,d\sigma$

(3) $u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_L \left[\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n_M} - u(M)\frac{\partial}{\partial n_M}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right]dS_M$

$-\frac{1}{2\pi}\iint_D \ln\frac{1}{r_{MM_0}}\cdot\Delta u d\sigma_M$

Δ——拉普拉斯算子.

3　试证明在二维的情况下调和函数的表达式

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_L \left[\ln\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]ds$$

其中 L 为一条封闭的光滑曲线, M_0 为 L 所围的区域中的一点.

4*　验证函数

$$u(x, y) = \frac{-1}{2\pi}\iint_D f(\xi, \eta)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}\right)d\xi d\eta$$

满足二维泊松方程 $\Delta u = f(x, y)$.

5　在以原点为中心, 以 a 为半径的圆内, 求泊松方程第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -xy \\ u\Big|_{r=a} = 0\end{cases}$$

的解.

6　求解球域上的狄利克莱问题

$$\begin{cases}u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, & x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ u(r, \theta, \varphi)\Big|_{r=1} = 3\cos 2\theta + 1, & (r, \theta, \varphi)\text{表示球坐标.}\end{cases}$$

7　在以原点为圆心, a 为半径的圆内, 求泊松方程第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -4 \\ u\Big|_{r=a} = 0\end{cases}$$

的解.

8　在半平面 $y>0$ 内求解拉普拉斯方程 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, 其边界条件

为 $u(x,0)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0 \text{ 时} \\ u_1, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}.\end{cases}$

9 (1) 试作出关于上半圆域的格林函数;

(2) 试作出关于上半球域的格林函数.

10 试证明泊松方程的狄利克莱内问题的解的唯一性与稳定性.

第六章　泊松方程的差分解法

从第一章到第五章可以看出，偏微分方程只是在一些特殊情况下才能求得定解问题的精确解. 但工程技术和科学实验提出的大量的偏微分方程问题需要解决，此时就必须借助于差分方法或近似方法以求得这些问题的数值解或近似解. 本章主要讨论泊松方程的差分方法，差分方程解的存在性及迭代法的收敛性等问题.

§6-1　泊松方程边值问题化为差分方程

1　网格法

如大家所熟悉的，在偏微分方程中常常提出如下的第一边值问题：即在平面区域 $G+\Gamma$ 上分别给出了微分方程和边值条件

$$\begin{cases} \Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), & 当(x,y)\in G \\ u=\varphi, & 当(x,y)\in\Gamma \end{cases} \tag{6.1.1}$$

其中 φ 是在 Γ 上的连续函数.

一般对这类方程若无法求出解的分析表达式，或者即便可以求出也很麻烦，用它来计算各点 u 值工作量很大. 并且在实际问题中往往也并不需要求出 u 在区域内每一点的值. 因此，我们就用近似方法求出 u 在区域 G 内某些点的近似值.

首先要解决在哪些点上求值问题. 我们按一定的规律作出平面上的网格，规定网格区域 G_h，使在 G_h 上能定义对应的差分方程. 如图 6-1，一般地，网格取作为平行于坐标轴间距为 h、l 的两族相交直线构成的. 任一交点 (x_i, y_k) 处有

$$x_i=a+ih,\quad (i=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$$

$$y_k = b + kl, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

这里 $h>0$, $l>0$, 分别称为网格沿 x, y 轴的步长，点(x_i, y_k)称为结点或网点. 若 $h \neq l$ 时称为**矩形网格**, $h = l$ 时称为**正方形网格**. 又 $u_{i,k} = u(x_i, y_k)$是函数 $u(x, y)$在点(x_i, y_k)处的值.

为了求出 u 在网格点上的值，我们利用 u 在这些点满足的方程

$$(\Delta u)_{i,k} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,k} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,k} = f_{i,k} \tag{6.1.2}$$

直接使用这一含偏导数的方程无法求出 u 值，因此就想把这组方程化为 u 在网格点上的值所近似地满足的线性代数方程组. 为此在(6.1.2)中用差商来代替偏导数

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,k} \approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,k} \approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{l^2}$$

于是从(6.1.2)得出 $u_{i,k}$ 解的近似值 $U_{i,k}$ 所满足的差分方程为

$$\frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h^2} + \frac{U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1}}{l^2} = f_{i,k} \tag{6.1.3a}$$

$$i, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

这是一个关于 $U_{i,k}$ 的线性代数方程组.

按照上述网格的划分，我们规定，若点$P(x_i, y_k)$及其四个相邻点(x_{i+1}, y_k), (x_{i-1}, y_k), (x_i, y_{k+1}), (x_i, y_{k-1})均属于 G, 则称 $P(x_i, y_k)$为**网格内点**，一切网格内点的集合记为 G_h. 一般地，把不属于 G_h 但包含在 $G+\Gamma$ 内的结点称为**网格界点**，这些点的集合记为 Γ_h(见图 6-1).

前述的 $U_{i,k}$ 除了满足差分方程之外，在网格界点Γ_h上还需要满足界点条件

$$U_{i,k}=b_{i,k},\qquad(6.1.3b)$$

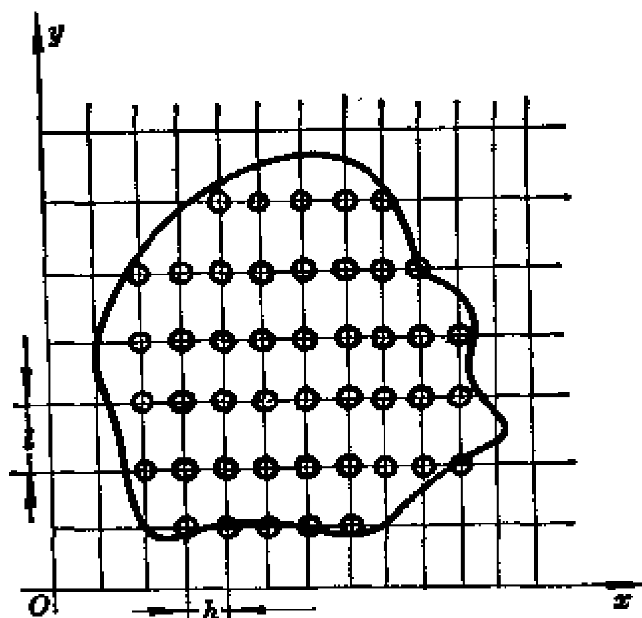


图 6-1

这里应当注意当网格界点(x_i, y_k)在边界Γ上时，$b_{i,k}=\varphi_{i,k}$. 当网格界点(x_i, y_k)不在Γ上时，则用函数插值法找出用φ表示出的某种$b_{i,k}$的近似值来.

综上所述求解偏微分方程第一边值问题(6.1.1)就转化为近似地去求解差分方程组(6.1.3a)、(6.1.3b). 这是一个线性代数方程组,可用简单迭代法,赛德尔(Seidel)法,…等等,求出解来.

从这个例子我们看到用网格法解泊松方程，必须解决以下三个问题:

1° 怎样选取网格，也就是在哪些点求值的问题. 选好网格后还有怎样将微分方程化为一组封闭的线性代数方程组（即差分方程)的问题.

2° 怎样解所得到的线性代数方程组(即差分方程)的问题.

3° 差分方程的精确解当$h\to0$, $l\to0$时是否收敛于偏微分方程的解,以及怎样估计它们的误差问题,也就是要判别所得到的结果是否有用的问题.

2 微分方程的差分格式的构造

我们在区域 G(如图 6-2)上讨论最简单的泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y) \tag{6.1.1}$$

我们选取这样的正方形网格：分别作一族平行于 x 轴和一族平行于 y 轴的直线，每族中相邻两条直线之间的距离都是 $h>0$. 今后的目的就是要在这两族直线在 G 内的交点(即网格点"○")上，近似地求出 u 值. 这里把坐标为$(a+ih, b+kh)$的网格点记成为(i, k)，u 与 f 在(i, k)的值记作为 $u_{i,k}$, $f_{i,k}$ 等等.

下面我们讨论怎样从微分方程去求出 $u_{i,k}$ 近似地满足一组线性代数方程组，也就是近似于微分方程的差分方程.

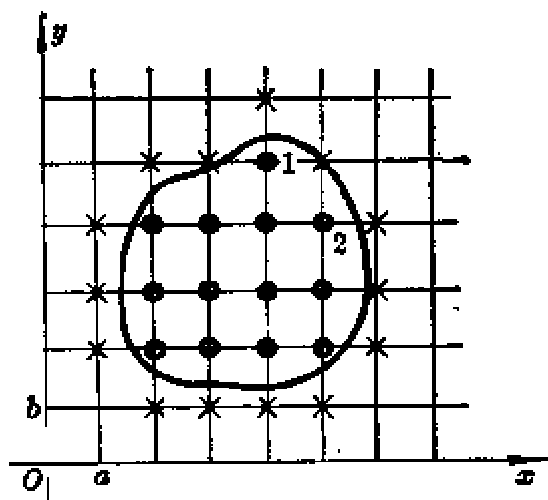


图 6-2

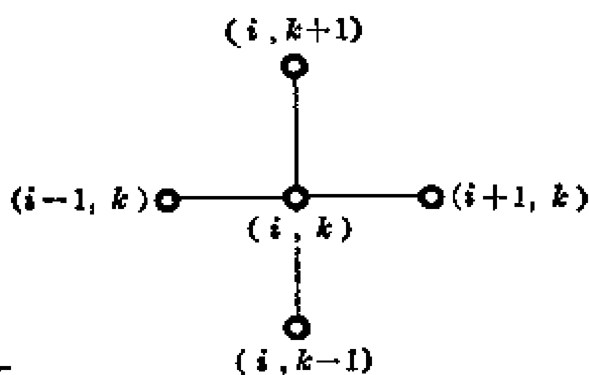


图 6-3

1° 第一种五点格式 如图 6-3 所示那样，我们用偏导数的差商近似公式去代替方程(6.1.1)中的偏导数，(6.1.1)式左端就近似地为

$$\frac{1}{h^2}\diamond u_{i,k} \tag{6.1.4}$$

其中

$$\diamond u_{i,k}=u_{i,k+1}+u_{i+1,k}+u_{i,k-1}+u_{i-1,k}-4u_{i,k} \tag{6.1.5}$$

在(6.1.5)中出现的只是点(i,k)及其相邻近的上下左右四个点上的u值. 利用二元函数的泰勒展开式, 就可以求得差分公式(6.1.4)与微分式$(\Delta u)_{i,k}$之间的误差. 这里

$$u_{i+1,k}=u_{i,k}+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,k}+\frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,k}+\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,k}+\frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{\widetilde{i,k}}$$

$$u_{i-1,k}=u_{i,k}-h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,k}+\frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,k}-\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,k}+\frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{\widetilde{i,k}'}$$

$$u_{i,k+1}=u_{i,k}+h\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,k}+\frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,k}+\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{i,k}+\frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{\underset{\sim}{i,k}}$$

$$u_{i,k-1}=u_{i,k}-h\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,k}+\frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,k}-\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{i,k}+\frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{\underset{\sim}{i,k'}}$$

此处$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{\widetilde{i,k}}$表示四阶偏导数$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)$在点$(i,k)$与$(i+1,\ k)$之间的中值, 余此类推. 将这四个式子相加, 并令

$$E=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{\widetilde{i,k}}+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{\widetilde{i,k}'}+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{\underset{\sim}{i,k}}+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{\underset{\sim}{i,k'}}\right\}$$

则得出下式

$$\frac{1}{h^2}\diamond u_{i,k}=(\Delta u)_{i,k}+R_{i,k} \qquad (6.1.6)$$

其中余式满足

$$|R_{i,k}|=\frac{h^2}{6}|E|\leqslant\frac{h^2}{6}M_4 \qquad (6.1.7)$$

此处M_4是u的各四阶导数的绝对值的公共上界. (6.1.7)式说

明差分形式(6.1.6)中以差分格式 $h^{-2}\diamond u_{i,k}$ 代替微分算式 $(\Delta u)_{i,k}$ 的误差是 $O(h^2)$ 阶的.

因而,若用 $U_{i,k}$ 表示 $u_{i,k}$ 的近似值,用 $h^{-2}\diamond u_{i,k}$ 代替(6.1.2)中的 $(\Delta u)_{i,k}$ 而忽略掉误差 $R_{i,k}$ 不计,就得到 $u_{i,k}$ 近似地满足的差分方程

$$\frac{1}{h^2}\diamond U_{i,k}=f_{i,k} \tag{6.1.8}$$

即(6.1.8)是 $u_{i,k}$ 的近似值 $U_{i,k}$ 满足的差分方程.

近似方程(6.1.8)的左端是用 u 在 (i,k) 及其上下左右四个邻点上的值的线性组合 $h^{-2}\diamond u_{i,k}$ 去近似代替 $(\Delta u)_{i,k}$ 而得到的.因此就产生了一个想法,能否用 u 在 (i,k) 和其他的一些相邻的网格点上的值的线性组合去近似代替 $(\Delta u)_{i,k}$,以得到比 $h^{-2}\diamond u_{i,k}$ 更近似于 $(\Delta u)_{i,k}$ 的公式.下面就来研究这个问题.

2° 第二种五点格式 现在我们用 (i,k) 及其邻近的四个角上的点 $(i-1,k+1)$,$(i-1,k+1)$,$(i+1,k-1)$,$(i-1,k-1)$ 上的 u 值的线性组合

$$Lu_{i,k}=C_0u_{i,k}+C_1(u_{i+1,k+1}+u_{i+1,k-1}-u_{i-1,k+1}+u_{i-1,k-1}) \tag{6.1.9}$$

去近似代替 $(\Delta u)_{i,k}$.其中 C_0, C_1 是待定常数,确定 C_0, C_1 以使得 $Lu_{i,k}$ 的确是 $(\Delta u)_{i,k}$ 的近似式,并尽可能地逼近于 $(\Delta u)_{i,k}$.为了确定 C_0, C_1,我们将 u 在点 $(i+1,k+1)$,$(i-1,k+1)$,$(i+1,k-1)$,$(i-1,k-1)$ 上的值按二元函数泰勒展开式展开

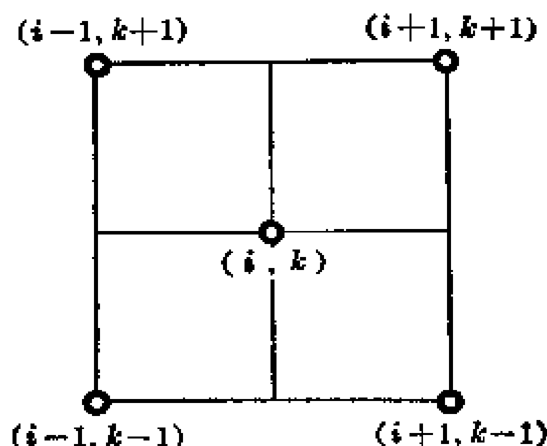


图 6-4

$$u_{i+1,k+1}=u_{i,k}+\left\{h\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)u+\frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u+\right.$$

$$+\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u+\frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u+\cdots\Big\}_{i,k}$$

$$u_{i-1,k+1}=u_{i,k}+\Big\{h\left(-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)u+\frac{h^2}{2!}\left(-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u+$$

$$+\frac{h^3}{3!}\left(-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u+\frac{h^4}{4!}\left(-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u+\cdots\Big\}_{i,k}$$

$$u_{i-1,k-1}=u_{i,k}+\Big\{-h\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)u+\frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u-$$

$$-\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u+\frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u+\cdots\Big\}_{i,k}$$

$$u_{i+1,k-1}=u_{i,k}+\Big\{h\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)u+\frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u+$$

$$+\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u+\frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u+\cdots\Big\}_{i,k}.$$

将这四个式子代人(6.1.9)的右端，便得到

$$Lu_{i,k}=(C_0+4C_1)u_{i,k}+4C_1\cdot\Big\{\frac{h^2}{2!}(\Delta u)_{i,k}+$$

$$+\frac{h^4}{4!}(u^{(4)}_{x^4}+6u^{(4)}_{x^2y^2}+u^{(4)}_{y^4})+\cdots\Big\}$$

为了使得 $Lu_{i,k}$ 是 $(\Delta u)_{i,k}$ 的近似表达式，由上式可知 C_0, C_1 必须满足

$$C_0+4C_1=0,\quad 2C_1h^2=1$$

解出 C_0, C_1 便得出

$$C_0=-\frac{2}{h^2},\qquad C_1=\frac{1}{2h^2}\tag{6.1.10}$$

于是又得出 $(\Delta u)_{i,k}$ 的一个新的差分近似式

$$Lu_{i,k}=\frac{1}{2h^2}\square u_{i,k}\tag{6.1.11}$$

其中

$$\square u_{i,k}=u_{i+1,k+1}+u_{i+1,k-1}+u_{i-1,k+1}+u_{i-1,k-1}-4u_{i,k}\tag{6.1.12}$$

这个差分形式与原微分方程左端$(\Delta u)_{i,k}$的误差$R^*_{i,k}$

$$\frac{1}{2h^2}\square u_{i,k}=(\Delta u)_{i,k}+R^*_{i,k} \tag{6.1.13}$$

满足

$$|R^*_{i,k}|\leqslant\frac{1}{2h^2}\frac{4h^4}{4!}2^3M_4=\frac{2}{3}h^2M_4$$

这里误差仍然是$O(h^2)$阶的.

因此用$\frac{1}{2h^2}\square u_{i,k}$去代替泊松方程(6.1.1)中左端的$(\Delta u)_{i,k}$而忽略掉误差$R^*_{i,k}$不计，就得到$u_{i,k}$近似地满足的差分方程

$$\frac{1}{2h^2}\square U_{i,k}=f_{i,k} \tag{6.1.14}$$

即(6.1.14)是$u_{i,k}$的近似值$U_{i,k}$满足的差分方程.

由此可以看到，只用(i,k)及其四个角上相邻的点上u值作线性组合去逼近$(\Delta u)_{i,k}$时，其精确度是不能再提高了. 所以为了得到更精确的差分近似式，就应该用更多的点上的u值来做线性组合. 下面就给出最常见的一种.

3° 九点格式 现在用(i,k)及其周围八个点上的u值作线性组合

$$Lu_{i,k}=C_1\diamond u_{i,k}+C_2\square u_{i,k}$$

来代替$(\Delta u)_{i,k}$. 其中C_1, C_2是待定常数. 仍然是用二元函数的泰勒展开式来确定C_1, C_2. 这里$Lu_{i,k}$的泰勒展开式为

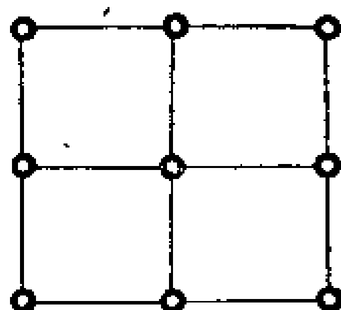


图 6-5

$$Lu_{i,k}=C_1\diamond u_{i,k}+C_2\square u_{i,k}=(C_1+2C_2)h^2(\Delta u)_{i,k}$$
$$+\frac{2h^4}{4!}\left\{(C_1+2C_2)(u_{x^4}+u_{y^4})+12C_2u_{x^2y^2}\right\}+\cdots \tag{6.1.15}$$

由此可见，要使$Lu_{i,k}$是$(\Delta u)_{i,k}$的近似公式，就必须$(C_1+2C_2)h^2=1$，这样不论怎样选择C_1, C_2都不能消去$Lu_{i,k}$中含有四阶导数

的项．因此 $Lu_{i,k}$ 与 $(\Delta u)_{i,k}$ 的逼近程度仍是 $O(h^2)$．

但是我们可以在使 $(\Delta u)_{i,k}$ 的系数为 1 的同时，也使含四阶导数的项恰好组合成 $(\Delta^2 u)_{i,k}$ 的倍数．这就是使得四阶导数的项成为 $(\Delta^2 u)_{i,k}$，即只要选择 C_1, C_2 满足

$$\begin{cases}(C_1+2C_2)h^2=1\\ 2(C_1+2C_2)=12C_2\end{cases}$$

解此方程组得出

$$C_1=\frac{2}{3h^2},\quad C_2=\frac{1}{6h^2} \tag{6.1.16}$$

于是 $Lu_{i,k}$ 中 $(\Delta u)_{i,k}$ 的系数是1，而含四阶导数的项是 $\frac{h^4}{12}(\Delta^2 u)_{i,k}$：

$$Lu_{i,k}=\frac{2}{3h^2}\diamond u_{i,k}+\frac{1}{6h^2}\square u_{i,k}=(\Delta u)_{i,k}+\frac{h^2}{12}(\Delta^2 u)_{i,k}+\cdots \tag{6.1.17}$$

这样选定 C_1, C_2 以后，$Lu_{i,k}$ 的展开式中含六阶导数的项也可以通过 Δu 来表示：

$$\frac{2h^6}{6!}(u_{x^6}+u_{y^6})_{i,k}\frac{2}{3h^2}+\frac{4h^6}{6!}(u_{x^6}+15u_{x^4y^2}+15u_{x^2y^4}+u_{y^6})_{i,k}\frac{1}{6h^2}$$

$$=\frac{2h^4}{6!\,3}(3u_{x^6}+15u_{x^4y^2}+15u_{x^2y^4}+3u_{y^6})_{i,k}$$

$$=\frac{2h^4}{6!}\left(\Delta^3 u+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\Delta u\right)_{i,k}$$

于是我们得到

$$Lu_{i,k}=\frac{1}{6h^2}\left\{4\diamond u_{i,k}+\square u_{i,k}\right\}=\Delta u_{i,k}+\frac{2h^2}{4!}(\Delta^2 u)_{i,k}+$$

$$+\frac{2h^4}{6!}\left(\Delta^3 u+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\Delta u\right)_{i,k}+R^*_{i,k} \tag{6.1.18}$$

其中

$$R_{i,k}^{**}=\frac{2}{3}\frac{h^6}{8!}\left\{3\Delta^4u+16\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\Delta^2u+20\frac{\partial^8u}{\partial x^4\partial y^4}\right\}_{i,k}+\cdots \tag{6.1.19}$$

如果在计算$\diamond u_{i,k}$，$\square u_{i,k}$中的$u_{i,k}$与相邻各点的差时，按泰勒公式展至含七阶导数的项并使余项含八阶导数，就可估计出$R_{i,k}^{**}$如下

$$\left|R_{i,k}^{**}\right|\leqslant\frac{1}{6}\frac{h^8}{8!}(4\cdot4+4\cdot2^8)M_8=\frac{520}{813}h^6M_8 \tag{6.1.20}$$

其中M_8是u的各个八阶偏导数的绝对值的共同上界.

因此，微分方程$\Delta u=f$的解u在(i,k)点上的值满足下列关系

$$\frac{1}{6h^2}\{4\diamond u_{i,k}+\square u_{i,k}\}=f_{i,k}+\frac{2h^2}{4!}(\Delta f)_{i,k}+$$

$$+\frac{2h^4}{6!}\left(\Delta^2f+2\frac{\partial^4f}{\partial x^2\partial y^2}\right)_{i,k}+R_{i,k}^{**} \tag{6.1.21}$$

当$f\equiv0$时，即对拉普拉斯方程$\Delta u=0$，有下列差分方程

$$\frac{1}{6h^2}\{4\diamond U_{i,k}+\square U_{i,k}\}=0 \tag{6.1.22}$$

如果用$\Delta u=0$的解代入，其误差为$R_{i,k}^{**}=O(h^6)$.

当$f\not\equiv0$时，即对于泊松方程$\Delta u=f$，则可用差分方程

$$\frac{1}{6h^2}\{4\diamond U_{i,k}+\square U_{i,k}\}=f_{i,k}+\frac{2h^2}{4!}(\Delta f)_{i,k} \tag{6.1.23}$$

其误差为$O(h^4)$. 又在实际解题时，计算Δf常常有困难，因此用$\frac{1}{h^2}\diamond f_{i,k}$去代替(6.1.23)中的$(\Delta f)_{i,k}$，于是便得到实际使用的差分格式:

$$\frac{1}{6h^2}\{4\diamond U_{i,k}+\square U_{i,k}\}=f_{i,k}+\frac{1}{12}\diamond f_{i,k} \tag{6.1.24}$$

容易看出其误差仍为$O(h^4)$.

到此为止，我们完成了将泊松方程 $\Delta u=f$ 化为代数方程组的工作，当然这里讲的是正方形网格的情形．这个方程组中方程的个数与图 6-2 中划“○”的个数相同，所求 u 值的个数也是这么多．但是问题到此并没有获得解决，因为在靠近区域 G 的边界 Γ 的点上列方程时，又要引进新的未知数，即划“×”的点上的 u 值．这样就使得到的方程组中未知数的个数多于方程的个数，因而这组方程的解不能确定．由于微分方程的解还由它的边值条件才能确定，所以我们就用边值条件来解决这个问题，使方程的个数与未知数的个数相同．

3　边值条件的差分近似

对于泊松方程而言，有下述三类边值条件：

第一类　$u|_{\Gamma}=\varphi$

第二类　$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\varphi$

第三类　$\left.\left[\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]\right|_{\Gamma}=\varphi$

这里 φ，σ 均是定义在 Γ 上与 u 无关的函数，$\boldsymbol{n}$ 是向外的法向方向．同时，这里只需讨论第一、三类边值条件就可以了．

1° 第一类边值问题　此时边值条件为

$$u|_{\Gamma}=\varphi \tag{6.1.25}$$

即 u 在边界 Γ 上的值 φ 是已知的．因此若新引进的画“×”的点刚好落在边界 Γ 上，则问题已经解决．若画“×”的点不落在边界 Γ 上，则可用下述两种方法来解决这个问题．

a　直接转移法　在靠近边界的画“○”的点 $(i,\ k)$（如图 6-2 的点 1）上，我们不再按前面第 2 小节中所说的办法列方程，也就没有引进新的未知数．我们用边界上离这点最近的点 R 上的 φ 值

近似地作为(i,k)的值，也就是令

$$U_{i,k}=\varphi(R) \tag{6.1.26}$$

如果(i,k)离边界较远(如图 6-2 中的 2)，那么也可以在(i,k)点上按第 2 小节中格式列出方程，而对新引进的画“×”的点依上法作直接转移.

b　线性插值　在靠近边界上画“○”的点P上不按第 2 小节中格式列方程，而按线性插值列方程. 这就不会引进新未知数(“×”点上的u值). 如图 6-6 所示，u在这些点上的值有近似的关系

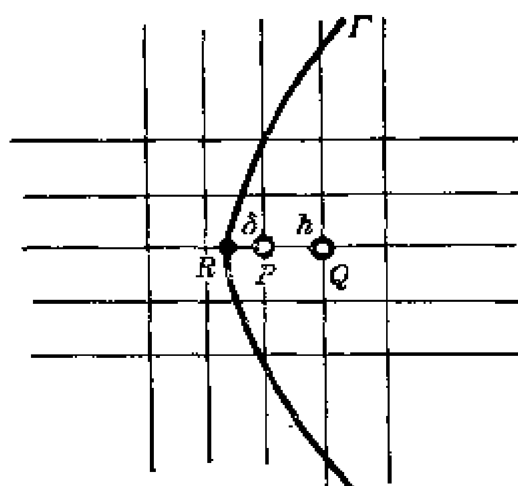


图　6-6

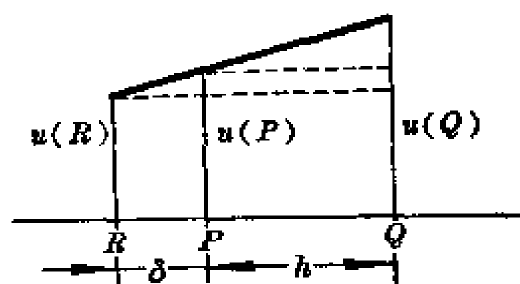


图　6-7

$$\frac{u(Q)-u(P)}{u(P)-u(R)}=\frac{h}{\delta}$$

于是在P点得到u的近似值所满足的方程

$$U(P)=\frac{hU(R)+\delta U(Q)}{h+\delta} \tag{6.1.27}$$

如果靠近边界的画“○”的点离边界较远(如图 6-8)，那么也可以在“○”点按第 2 小节中格式列方程，而对新引进的画“×”的点P按线性插值法列出u在这些点上的值所适合的近似方程

$$\frac{u(Q)-u(P)}{u(R)-u(P)}=\frac{h}{\delta}$$

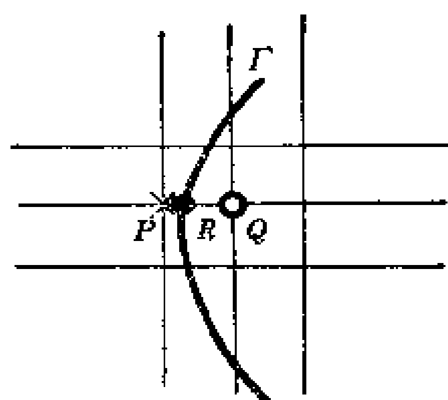


图 6-8

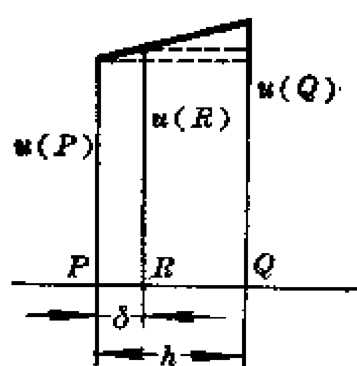


图 6-9

于是得到 u 的近似值 U 在 P 点满足的方程

$$U(P)=\frac{hU(R)-\delta U(Q)}{h-\delta} \tag{6.1.28}$$

此时 $0\leqslant\delta<\frac{h}{2}$.

2° 第三边值问题 如果在网格内点上已如前所述列出了差分方程，现在的问题是如何处理网格边界点上的 u 值，以使方程的个数与未知数个数相同. 分两种情况讨论.

第一种网格的边界点 P 刚好落在边界 Γ 上. 这时就在 P 点直接由边界条件列出一个差分方程. 实现这个问题的关键是如何用差分近似地替代 $\frac{\partial u}{\partial n}$，以下就解决这个问题:

a 边界上 P 点的外法向 n 与坐标轴平行 此时情况如图

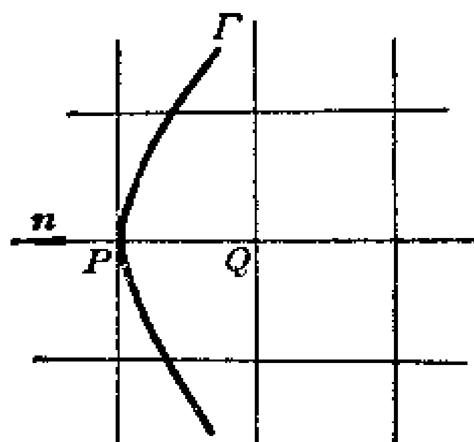


图 6-10

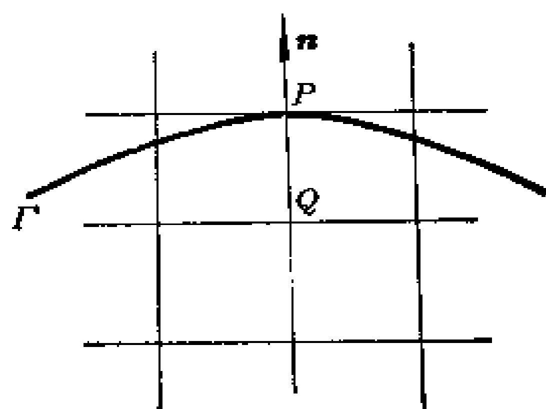


图 6-11

6-10 或 6-11 所示，显然有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\frac{u(P)-u(Q)}{h}+O(h)$$

于是得到 u 在 P 点近似地满足的差分方程

$$\frac{U(P)-U(Q)}{h}+\sigma U(P)=\varphi(P)$$

并知此方程的误差为 $O(h)$.

b 边界上 P 点的外法向 $\boldsymbol{n}$ 与坐标轴不平行 此时情况如图 6-12 所示. 显然有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P&=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)\right\}_P\\&=\frac{u(Q)-u(P)}{h}\cos(\pi+\alpha)+\\&\quad+\frac{u(R)-u(P)}{h}\cos(\pi-\beta)+O(h)\end{aligned}\tag{6.1.29}$$

于是在 P 点可以得到误差为 $O(h)$ 的近似的差分方程

$$\frac{U(P)-U(Q)}{h}\cos\alpha+\frac{U(P)-U(R)}{h}\cos\beta+\delta U(P)=\varphi(P)\tag{6.1.30}$$

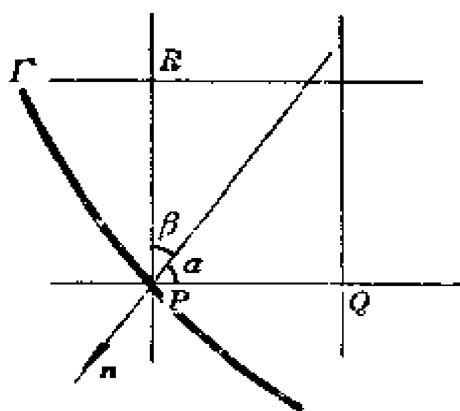


图 6-12

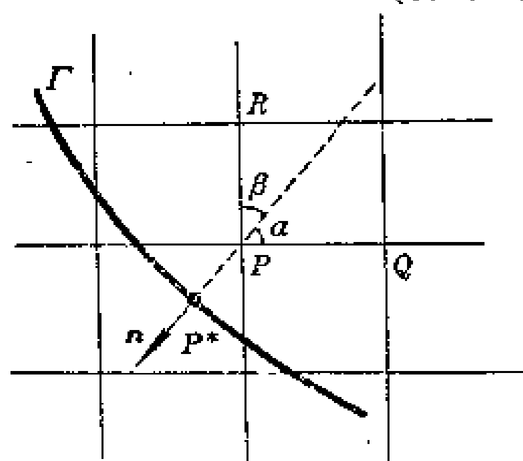


图 6-13

第二种网格的边界点 P 不在 Γ 上. 这时仍按第一种情况在 P 点列方程. 但是需要用到边界 Γ 上与 P 相近的某点 P^* 的外法向作为点 P 的 $\boldsymbol{n}$，并且近似地认为方程中出现的 $\varphi(P)$ 就等于 $\varphi(P^*)$.

如图 6-13 所示.

到此为止,我们已经完全解决了正方形网格的情况下,怎样把泊松方程的边值问题化为一个线性代数方程组了，此时还是一个方程个数与未知数个数相同的线性代数方程组．这只是解微分方程的第一步,常常还需要研究以下几个问题:

1）当 $h\to 0$ 时,差分方程是否逼近微分方程,如何估计逼近程度?

2）差分方程组是否可解?

3）如何解差分方程组?

4）差分方程组的解当 $h\to 0$ 时是否收敛于微分方程的解?

用差分方程去逼近微分方程，产生的误差 R_{ik}[见(6.1.6)]称为**截断误差**．截断误差的估计从(6.1.7)可知是 h^2 阶的．所以当 $h\to 0$ 时，差分方程逼近于微分方程．至于 2)、3)、4)留作下节讨论.

还需指出,网格可以是矩形的网格,平行四边形的网格，甚至还可以是正六边形网格,等等.

§6-2　差分方程解的存在性及迭代法的收敛性

在§6-1 中已讨论了怎样用差分方程分别去近似替代微分方程和边界条件,从而得到相应的线性代数方程组,本节将要讨论这样的线性代数方程组在什么条件下解存在,怎样求出解.以及解的收敛性等问题．下面只讨论泊松方程的第一边值问题.

1　解的存在性

假设所讨论的泊松方程的第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), \text{当}(x,y)\in G \\ u|_{\Gamma}=\varphi \end{cases} \tag{6.1.1}$$

所考虑的区域是矩形区域 G: $\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\}$. 将线段 $0\leqslant x\leqslant a$ 分成为 l 等分，步长 $h=\dfrac{a}{l}$; 线段 $0\leqslant y\leqslant b$ 以步长 h 分为 m 等分，此时 $m=\left[\dfrac{b}{h}\right]$. 取(6.1.1)相当的第一种五点格式 (6.1.8)，并把这个差分方程(6.1.8)化为下述形式

$$U_{i,k}=\frac{1}{4}\{U_{i,k+1}+U_{i+1,k}+U_{i,k-1}+U_{i-1,k}-f_{i,k}\cdot h^2\} \tag{6.2.1}$$

$$(i=1,2,\cdots,l-1;\ k=1,2,\cdots,m-1)$$

由于所讨论的区域是矩形区域，此时边界结点完全落在边界上①. 根据(6.1.1)中给定的边界条件，在边界结点上我们有

$$\begin{aligned}U_{i,k}=\varphi(ih,kh),\quad & i=0,l,\quad k=0,1,2,\cdots,m\\ & k=0,m,\quad i=0,1,2,\cdots,l\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

方程(6.2.1), (6.2.2)是一个线性代数方程组，它的方程个数和未知量个数是相同的.

下面叙述一个保证差分方程(6.2.1)和(6.2.2)的解存在的极值原理:

极值原理 设 $v_{i,k}$ 是定义在 $G_h+\Gamma_h$ 上的一组数值，$v_{i,k}\neq$常数，并且在 G_h 内，若 $\dfrac{1}{h^2}\diamond v_{i,k}\geqslant 0$, 那末 $v_{i,k}$ 不可能在内部结点上(即 G_h 内)达到正的最大值. 若 $\dfrac{1}{h^2}\diamond v_{i,k}\leqslant 0$, 那末 $v_{i,k}$ 不可能在内部结点上(即 G_h 内)达到负的最小值.

证明 用反证法 设 M 是 $v_{i,k}$ 的正的最大值，并且最大值点为 $(i_0, k_0)\in G_h$, 即有 $v_{i_0,k_0}=M$.

因为 $v_{i,k}\neq$常数，所以在 (i_0,k_0) 相邻的结点上至少有一个 $v_{i,k}$ 小于 M.

---

① 当 b/h 恰好为整数时，边界结点恰好落在边界上，当 b/h 不是整数时，此时 m 应取 $[b/h]+1$.

因而

$$\frac{1}{h^2}\Diamond v_{i_0,k_0}=\frac{1}{h^2}(v_{i_0,k_0+1}+v_{i_0+1,k_0}+v_{i_0,k_0-1}+v_{i_0-1,k_0}-4v_{i_0,k_0})<0$$

这与假设矛盾.

至于第二部分，只需考虑$-\frac{1}{h^2}\Diamond v_{i,k}\geqslant 0$. 利用刚才已证明过的事实可知. $-v_{i,k}$不可能在内部结点上(即G_h内)达到正的最大值. 从而，当$\frac{1}{h^2}\Diamond v_{i,k}\leqslant 0$时，$v_{i,k}$不可能在内部结点上(即$G_h$内)达到负的最小值. 证毕.

定理 差分方程(6.2.1)、(6.2.2)有唯一解.

先证明齐次方程组

$$\begin{cases}\Diamond U_{i,k}=0, & (i,k)\in G_h\\ U_{i,k}=0, & (i,k)\in\Gamma_h\end{cases}$$

只有零解. 因为$\Diamond U_{i,k}=0$, $(i,k)\in G_h$，故由极值原理，$U_{i,k}$只能在Γ_h上取正的最大值. 但因在Γ_h上$U_{i,k}=0$，所以

$$U_{i,k}\leqslant 0,\ (i,k)\in G_h+\Gamma_h$$

再由极值原理的第二部分得到

$$U_{i,k}\geqslant 0,\ (i,k)\in G_h+\Gamma_h$$

由此推得$U_{i,k}=0$, $(i,k)\in G_h+\Gamma_h$.

这条结论说明，线性代数方程组(6.2.1)，(6.2.2)的齐次方程组只有零解. 从线性代数知识可知，这只有线性方程组的系数行列式不等于零的情况才有可能，从而线性代数方程组(6.2.1)、(6.2.2)就一定有唯一解. 这就证明了所得的差分方程恒有唯一解.

2 迭代格式的选择

对泊松方程第一边值问题(6.1.1)，在1中已构造了相应的差分方程(6.2.1)，(6.2.2)，并证明了差分方程必有唯一解存在. 下

面讨论实际求解的方法.

在实际计算中，为了保证精确度，步长往往取得较小，因此网格区域的结点很多，所以差分方程是一个高阶的线性代数方程组. 由于对所列五点差分格式，每一内结点只依赖周围相邻的四点，因此相应的线性代数方程组的系数矩阵有大量的零元素，即是一个"稀疏"矩阵，采用迭代法就可以充分利用这一优点.

a 同步迭代法(简单迭代法) 首先任意给定在网格区域内结点(x_i, y_k)上的数值$\{U_{i,k}^{(0)}\}$作为解的零次近似，把这组数值代入(6.2.1)的右端得到

$$U_{i,k}^{(1)}=\frac{1}{4}\{U_{i,k+1}^{(0)}+U_{i+1,k}^{(0)}+U_{i,k-1}^{(0)}+U_{i-1,k}^{(0)}\}-\frac{h^2}{4}f_{i,k}$$

作为解的一次近似. 这里若涉及到边界结点上的值，均用(6.2.2)式所给定的已知值代入，下同. 一般地讲，在已给定解的第n次近似$\{U_{i,k}^{(n)}\}$后，由公式

$$U_{i,k}^{(n+1)}=\frac{1}{4}[U_{i,k+1}^{(n)}+U_{i+1,k}^{(n)}+U_{i,k-1}^{(n)}+U_{i-1,k}^{(n)}]-\frac{h^2}{4}f_{i,k} \tag{6.2.3}$$

得到解的第$n+1$次近似. 这样就得到了一个近似解序列$\{U_{i,k}^{(n)}\}$，$n=0, 1, 2\cdots$.

可以证明，不论零次近似$\{U_{i,k}^{(0)}\}$如何选取，当$n\to\infty$时，此序列必收敛于差分问题(6.2.1)、(6.2.2)的精确解. 因此，当n相当大时，$\{U_{i,k}^{(n)}\}$就给出所要求的近似解. 又通常，对充分大的n，当相邻两次迭代解$\{U_{i,k}^{(n-1)}\}$，$\{U_{i,k}^{(n)}\}$间的误差小于某个预先给定的适当小的控制数$\varepsilon>0$时，就可结束迭代过程，而取$\{U_{i,k}^{(n)}\}$作为迭代近似解.

b 异步迭代法(赛德尔迭代法) 在电子计算机上采用同步迭代法求解时，必须要有两套工作单元来存储网格区域结点上的解在迭代过程中的新值与旧值. 为了节省工作单元，并加快迭代

收敛的速度，通常采用所谓异步迭代法求解，即在计算第 $n+1$ 次近似值 $U_{i,k}^{(n+1)}$ 时，如图 6-3 所示，如果某些邻点的 $n+1$ 次近似值已在前面求得，就可直接把此值代入(6.2.3)中的右端以代替原来应代入的第 n 次近似值。同时按结点的自然顺序进行迭代，即 k 小的先作，对固定的 k，i 小的先作，如图 6-14 所示，于是得出下述迭代公式

$$U_{i,k}^{(n+1)}=\frac{1}{4}[U_{i,k-1}^{(n+1)}+U_{i-1,k}^{(n+1)}+U_{i+1,k}^{(n)}+U_{i,k+1}^{(n)}]-\frac{h^2}{4}f_{i,k} \tag{6.2.4}$$

同样，这里右端涉及边界结点上的值时，均采取(6.2.2)式所给定的已知值代入。显然，用这种次序进行迭代时（参见图 6-14），在求结点 (x_i, y_k) 的第 $n+1$ 次近似解 $U_{i,k}^{(n+1)}$ 时，其周围四个结点中，结点 (x_{i-1}, y_k) 及 (x_i, y_{k-1}) 处的 $k+1$ 次近似解已经求得，而在结点 (x_{i+1}, y_k) 及 (x_i, y_{k+1}) 处还只有 k 次近似解。

31	32	33	34	35	36	
25	26	27	28	29	30	
19	20	21	22	23	24	
13	14	15	16	17	18	
7	8	9	10	11	12	
1	2	3	4	5	6	

图 6-14

由此可以看出，用异步迭代法进行迭代求解，只需用一套工作单元来存储网格区域结点上的近似解。同时也可以证明，当 $n\to\infty$ 时，异步迭代法所得到的序列 $\{U_{i,k}^{(n)}\}$ 必收敛于差分方程问题的精确解，其收敛速度比同步迭代法要快一倍左右。因此，异步迭代法是求解泊松方程定解问题的一个值得采用的方法。

c **逐次超松弛迭代法(SOR 法)** 通过实际计算表明，在结点个数较多的情况下，异步迭代法的收敛速度仍然很慢，因此如何

加快迭代收敛的速度，就是一个很迫切的问题．为了加快迭代收敛的速度，就在异步迭代法的基础上提出了逐次超松弛迭代的方法，即 SOR 方法．方法的基本思想是

$$\begin{cases}\widetilde{U}_{i,k}^{(n+1)}=\frac{1}{4}[U_{i,k-1}^{(n+1)}+U_{i-1,k}^{(n+1)}+U_{i+1,k}^{(n)}+U_{i,k+1}^{(n)}]-\frac{h^2}{4}f_{i,k} & (6.2.5)\\ U_{i,k}^{(n+1)}=\omega\widetilde{U}_{i,k}^{(n+1)}+(1-\omega)U_{i,k}^{(n)} & (6.2.6)\end{cases}$$

或写成下述式

$$U_{i,k}^{(n+1)}=\frac{\omega}{4}[U_{i,k-1}^{(n+1)}+U_{i-1,k}^{(n+1)}+U_{i+1,k}^{(n)}+U_{i,k+1}^{(n)}]-\frac{\omega}{4}h^2f_{i,k}+(1-\omega)U_{i,k}^{(n)} \qquad (6.2.7)$$

其中 ω 是一个常数，称为**超松弛因子**，且 $1<\omega<2$．

由(6.2.5)式所决定的 $\widetilde{U}_{i,k}^{(n+1)}$ 就是用异步迭代法(6.2.4)所得的新值，可以想象它比旧值 $U_{i,k}^{(n)}$ 更接近于真正的解．超松弛迭代实际上就是用大于1的常数 ω 乘 $\widetilde{U}_{i,k}^{(n+1)}$ 加大它在迭代中所起的作用，再和旧值适当的进行平均(6.2.6)，而由(6.2.7)式给出迭代的新值 $U_{i,k}^{(n+1)}$．实践表明，采用上述次序进行迭代时，选取适当的超松弛因子 ω，就可极大地加快迭代速度．理论上已经证明，逐次超松弛迭代法收敛的充要条件是

$$0<\omega<2,\quad |\lambda|<1$$

其中

$$\lambda=\lambda_{r,s}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{r\pi}{l}+\cos\frac{s\pi}{m}\right),\qquad \begin{aligned}r&=1,2,\cdots,l-1\\ s&=1,2,\cdots,m-1\end{aligned}$$

而最优松弛因子 $\omega=\omega_{opt}$ 由下式确定

$$\omega_{opt}=\frac{2}{1+\sqrt{1-|\lambda_H|^2}}$$

其中 $|\lambda_H|^2=\max\limits_{r,s}|\lambda_{r,s}^2|$．①

① 南京大学数学系计算数学专业编，《偏微分方程数值解法》，第三章，§3，科学出版社，1979年．

显然，在(6.2.7)中如果取 $\omega=1$，就化为普通的异步迭代法式(6.2.4)。

现以矩形域为例，说明(6.2.7)的详细计算步骤如下：

第一类边值问题

1　给出区域边界 a，b，c，d，以及 x、y 方向的等分数 M，N，误差控制数 ε 及迭代初始值 $V_{i,k}$。

2　计算步长

$$h=\frac{b-a}{M},\quad l=\frac{d-c}{N}$$

3　给出松弛因子 ω 的值，或者按照某种选择最佳松弛因子的计算公式计算出 ω 的值。

4　计算出分点坐标

$$x_i=a+ih,\ y_k=c+kl$$

5　计算边值

6　调用 $f(x,y)$ 的子程序计算 $f(x_i,y_k)$。

7　利用(6.2.7)计算 $u_{i,k}$

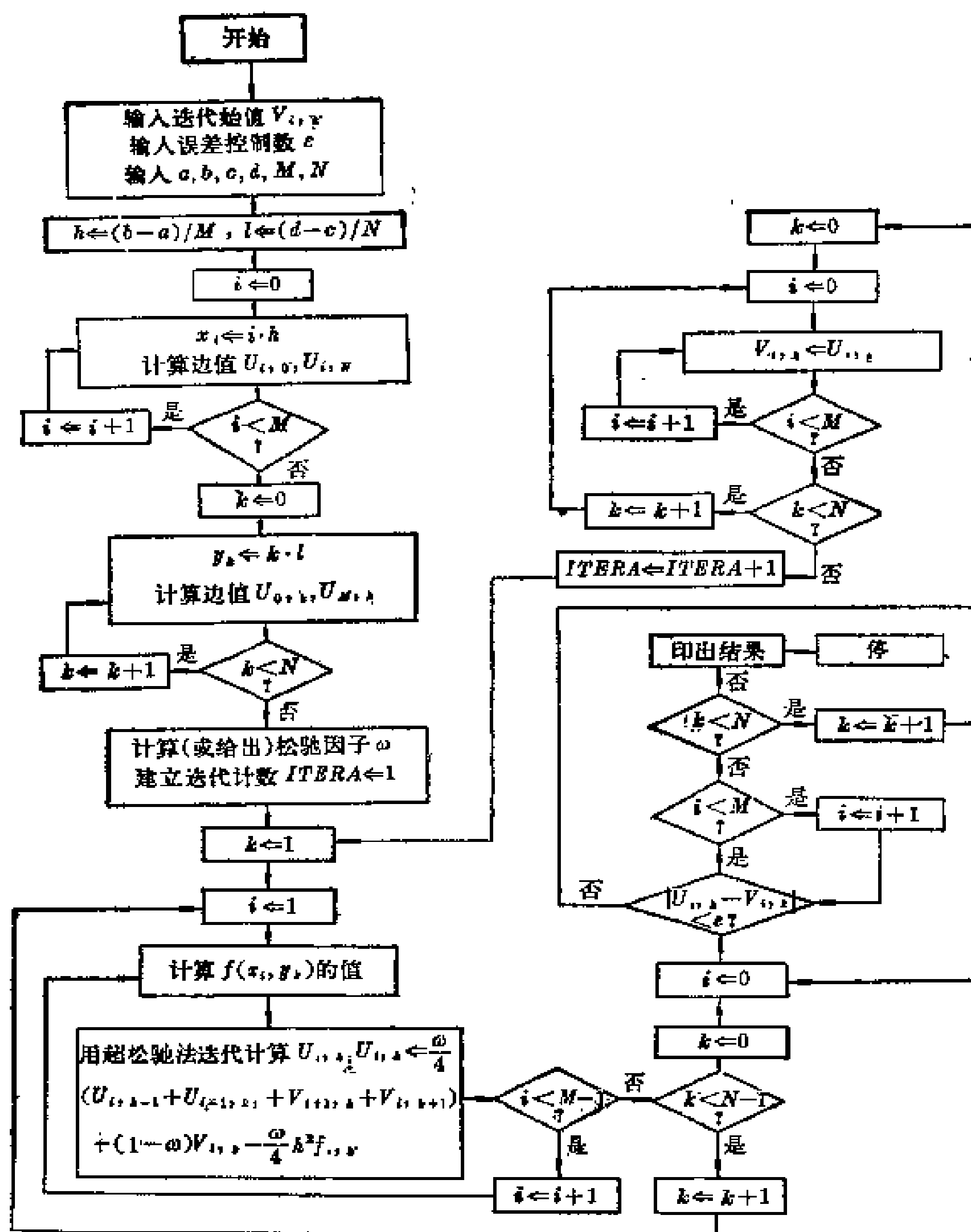
$$U_{i,k}=\frac{\omega}{4}(U_{i,k-1}+U_{i-1,k}+V_{i+1,k}+V_{i,k+1})$$

$$-\frac{\omega}{4}h^2f_{i,k}+(1-\omega)V_{i,k}$$

这里的 $U_{i,k}$ 是(6.2.7)中的新值 $U_{i,k}^{(n+1)}$，$V_{i,k}$ 代表(6.2.7)中的旧值 $U_{i,k}^{(n)}$。

8　检查 $|U_{i,k}-V_{i,k}|=|U_{i,k}^{(n+1)}-U_{i,k}^{(n)}|<\varepsilon$ 对所有的 i,k 是否成立？成立则计算结束？否则用新值 $U_{i,k}$ 替换旧值 $V_{i,k}$ 后回到步骤7，进行重复计算。如此循环，直到对一切 i,k 均成立 $|U_{i,k}-V_{i,k}|<\varepsilon$ 为止。

计算框图如下：



第三类边值问题

在矩形域的情形下，第三类边界条件相当于下列四个条件

$$x=a: \quad -\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u=\varphi(a, y)$$

$$x=b:\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u=\varphi(b,y)$$

$$y=c:\quad -\frac{\partial u}{\partial y}+\sigma u=\varphi(x,c)$$

$$y=d:\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\sigma u=\varphi(x,d)$$

为了使误差达到 $O(h^2)$，利用牛顿(Newton)等距插值公式，将上列四个方程化为差分方程

$$\begin{cases} -\dfrac{-U_{2,k}+4U_{1,k}-3U_{0,k}}{2h}+\sigma U_{0,k}=\varphi(x_0,y_k) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k=0,1,2,\cdots,N \\ \dfrac{3U_{M,k}-4U_{M-1,k}+U_{M-2,k}}{2h}+\sigma U_{M,k}=\varphi(x_M,y_k) \\ -\dfrac{-U_{i,2}+4U_{i,1}-3U_{i,0}}{2l}+\sigma U_{i,0}=\varphi(x_i,y_0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i=0,1,2,\cdots,M \\ \dfrac{3U_{i,N}-4U_{i,N-1}+U_{i,N-2}}{2l}+\sigma U_{i,N}=\varphi(x_i,y_N) \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} U_{0,k}=\dfrac{2h\varphi_{0,k}-U_{2,k}+4U_{1,k}}{3+2\sigma h} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k=0,1,2,\cdots,N \\ U_{M,k}=\dfrac{2h\varphi_{M,k}+4U_{M-1,k}-U_{M-2,k}}{3+2\sigma h} \\ U_{i,0}=\dfrac{2l\varphi_{i,0}-U_{i,2}+4U_{i,1}}{3+2\sigma l} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i=0,1,2,\cdots,M \\ U_{i,N}=\dfrac{2l\varphi_{i,N}+4U_{i,N-1}-U_{i,N-2}}{3+2\sigma l} \end{cases} \qquad (*)$$

这里与第一类边值问题不同的是边界值 $U_{0,k}, U_{M,k}, U_{i,0}, U_{i,N}$ 需要参加迭代计算．其具体计算步骤如下：

1、2、3、4 同第一类边值问题．

5　调用 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 的子程序计算 $f(x_i, y_k)$ 与 $\varphi(x_i, y_k)$，分别以 $f_{i,k}$，$\varphi_{i,k}$ 记之.

6　迭代开始，将(＊)右端的 $U_{i,k}$ 以旧值 $V_{i,k}$ 代替，计算出边值 $U_{0,k}$，$U_{M,k}$，$U_{i,0}$，$U_{i,N}$.

7　利用(6.2.7)计算 $U_{i,k}$.

8　检查 $|U_{i,k}-V_{i,k}|<\varepsilon$ 对一切 i,k 是否成立？成立则计算结束，否则用新值 $U_{i,k}$ 替换旧值 $V_{i,k}$ 后回到步骤 6，进行重复计算，直到对一切 i,k 均成立 $|U_{i,k}-V_{i,k}|<\varepsilon$ 为止.

计算框图如第 190 页.

例 1　在正方形区域：$0\leqslant x\leqslant 4$，$0\leqslant y\leqslant 3$ 上讨论下列拉普拉斯方程第一边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u|_{\Gamma}=\varphi\end{cases}$$

其中 φ 的取值如图 6-15 所示.

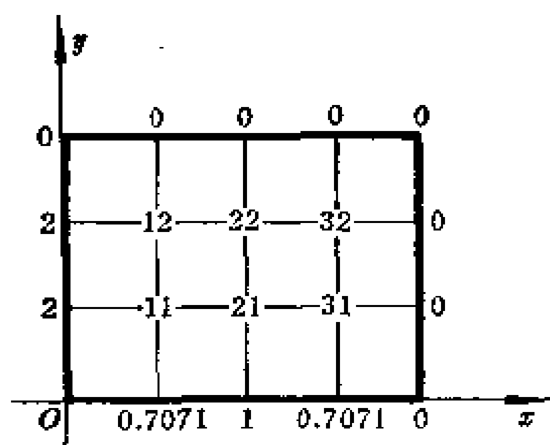


图 6-15

解　用等分网格，$h=1$. 由于内结点只有六个，初始近似值可取为边界值的平均值，即

$$U_{i,k}^{(0)}=\frac{1}{14}(0\times 9+2\times 2+0.7071\times 2+1)=0.4582$$

用赛德尔迭代公式(6.2.4)(注意此时 $f_{i,k}\equiv 0$！)：

$$U_{i,k}^{(n+1)}=\frac{1}{4}(U_{i,k-1}^{(n+1)}+U_{i-1,k}^{(n+1)}+U_{i+1,k}^{(n)}+U_{i,k+1}^{(n)})$$

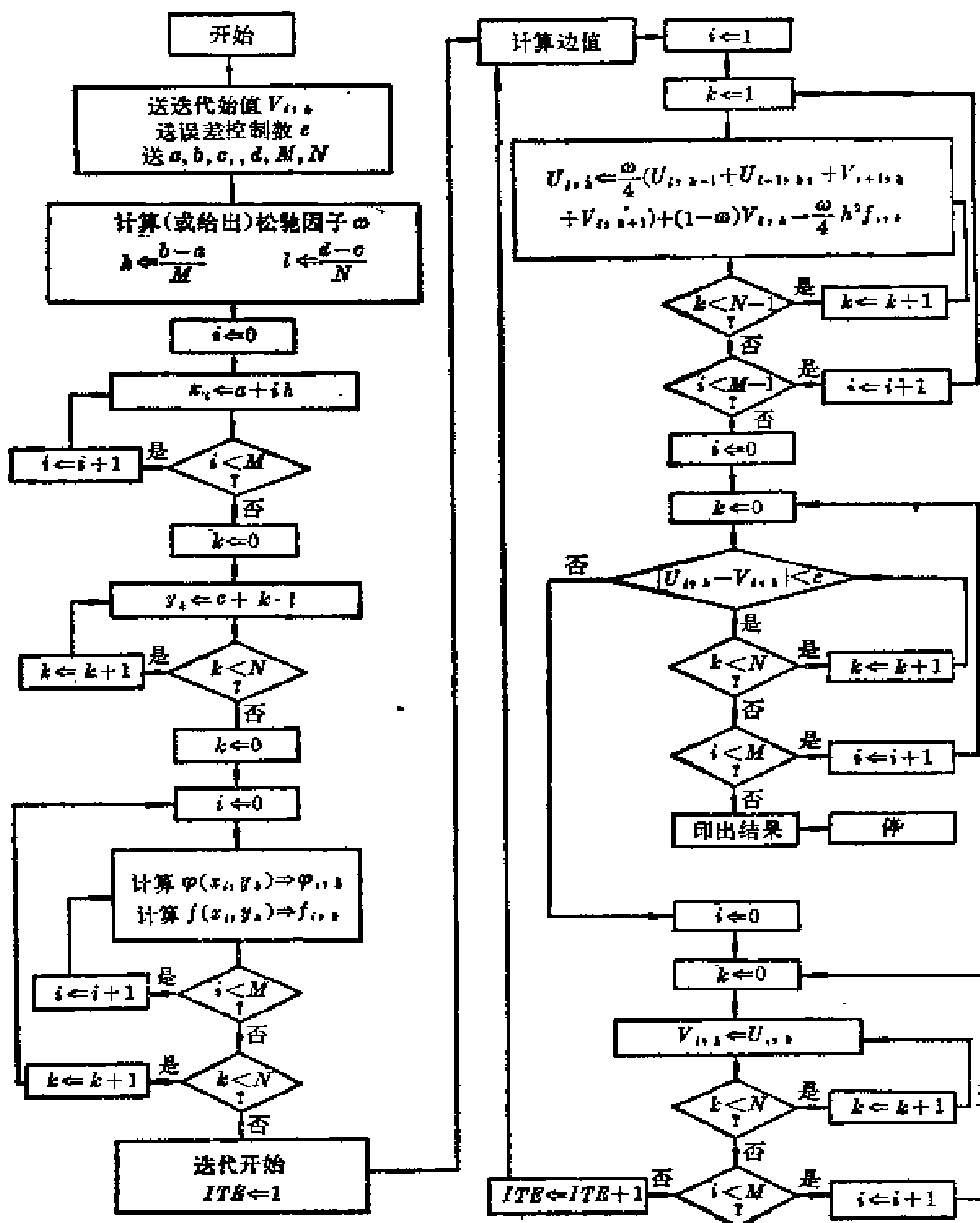
例如，计算步骤如下：

$$U_{1,1}^{(1)}=\frac{1}{4}(0.7071+2+0.4582\times 2)=0.9059$$

$$U_{2,1}^{(1)}=\frac{1}{4}(1+0.9059+0.4582\times 2)=0.7056$$

$$U_{3,1}^{(1)}=\frac{1}{4}(0.7071+0.7056+0.4582)=0.4677$$

$$U_{1,2}^{(1)}=\frac{1}{4}(0.9059+2+0.4582)=0.8410$$



$$U_{2,2}^{(1)}=\frac{1}{4}(0.7056+0.8410+0.4582)=0.5012$$

$$U_{3,2}^{(1)}=\frac{1}{4}(0.4677+0.5012+0)=0.2422$$

………………………………………………

继续计算下去，一直到 $U_{i,k}^{(16)}$ 才达到稳定，故将 $U_{i,k}^{(16)}$ 作为本例的近似解.

$U_{i,k}^{(0)}$

	0	0	0	
2	0.4582	0.4582	0.4582	0
2	0.4582	0.4582	0.4582	0
	0.7071	1	0.7071	

$U_{i,k}^{(1)}$

0.8410	0.5012	0.2422
0.9059	0.7056	0.4677

$U_{i,k}^{(5)}$

0.8331	0.4614	0.2195
1.0833	0.7404	0.4157

$U_{i,k}^{(16)}$

0.8667	0.4616	0.2916
1.0836	0.7405	0.4168

例 2 在正方形区域：$0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$ 上讨论下列拉普拉斯方程第一边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ 0<x<\pi,\ 0<y<\pi\\ u|_{x=0}=u|_{x=\pi}=u|_{y=0}=0\\ u|_{y=\pi}=\sin x\end{cases}$$

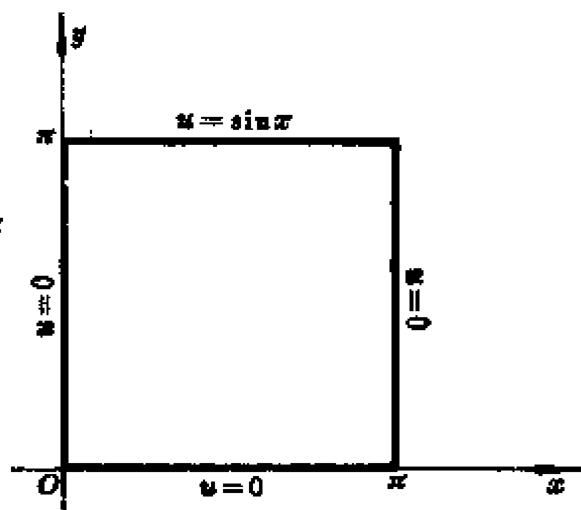


图6-16

解 容易验证问题的精确解为

$$u=\frac{\sin x\cdot \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh}\pi}$$

现在用等分网格取步长为 $h=\frac{\pi}{20}$，共 361 个内节点，用差分方法求解上述边值问题．分别用异步迭代法（$\omega=1$）及逐次超松弛

迭代法($\omega=1.65$, 1.70, 1.75, 1.80, 1.85, 1.95)求解所得的差分方程. 并在迭代中统一规定相邻两次迭代解的最大绝对值误差的控制值为 $\varepsilon=0.1\times10^{-8}$, 将所得的计算结果列表如下:

求解方法	迭代次数	在 $(x,y)=\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 之值	
		精确解	近似解
异步迭代法 ($\omega=1$)	8	0.199268	0.199[illegible]70
($\omega=1$)	293	0.199268	0.2002412
($\omega=1$)	446	0.199268	0.199[illegible]672
($\omega=1$)	670	0.199268	0.19985762
逐次超松弛迭代法 ($\omega=1.65$)	120	0.199268	0.19985735
($\omega=1.70$)	93	0.199268	0.19985755
($\omega=1.75$)	83	0.199268	0.19985758
($\omega=1.80$)	101	0.199268	0.19985758
($\omega=1.85$)	131	0.199268	0.19985758
($\omega=1.95$)	403	0.199268	0.19985758

从上述表格可以看到, 对迭代法的收敛速度有一个感性认识. 同时, 还可以看到, 采用异步迭代法, 收敛的速度很慢, 如果采用逐次超松弛迭代法, 的确可以加快迭代收敛的速度, 而选用最佳的松弛因子, 可以使迭代收敛速度大大加快. 还可以看到用差分法求得的近似解, 在步长 h 较小时, 非常接近于问题的精确解.

3 迭代的收敛性

在 2 中所述迭代格式都是收敛的. 作为一个例子, 我们在矩形区域的情况下, 证明异步迭代法的收敛性. 设 $U_{i,k}$ 是(6.2.4)的精确解, $\{U_{i,k}^{(n)}\}$ 是按异步迭代法(6.2.4)的第 n 次迭代近似解.

我们要证明，当 $n\to\infty$ 时，对于一切的 i,k 有

$$U_{i,k}^{(n)}\longrightarrow U_{i,k} \tag{6.2.8}$$

令 $e_{i,k}^{(n)}=U_{i,k}^{(n)}-U_{i,k}$ 时，或要证明，当 $n\to\infty$ 时

$$e_{i,k}^{(n)}\longrightarrow 0,\quad 对一切\ i,k$$

令 $\varepsilon=\max\limits_{i,k}\{e_{i,k}^{(0)}\}$. 由于我们规定从网格的左下角开始算起，与第一个结点相邻的四个结点中，至少有一个是边界上的结点(图6-17). 首先由(6.2.1),(6.2.4)有下述误差方程

$$\begin{cases} e_{i,k}^{(n+1)}=\dfrac{1}{4}[e_{i,k-1}^{(n+1)}+e_{i-1,k}^{(n+1)}+e_{i+1,k}^{(n)}+e_{i,k+1}^{(n)}], & 于\ G_h \\ e_{i,k}^{(n+1)}=0, & 于\ \Gamma_h\ 上 \end{cases} \tag{6.2.9}$$

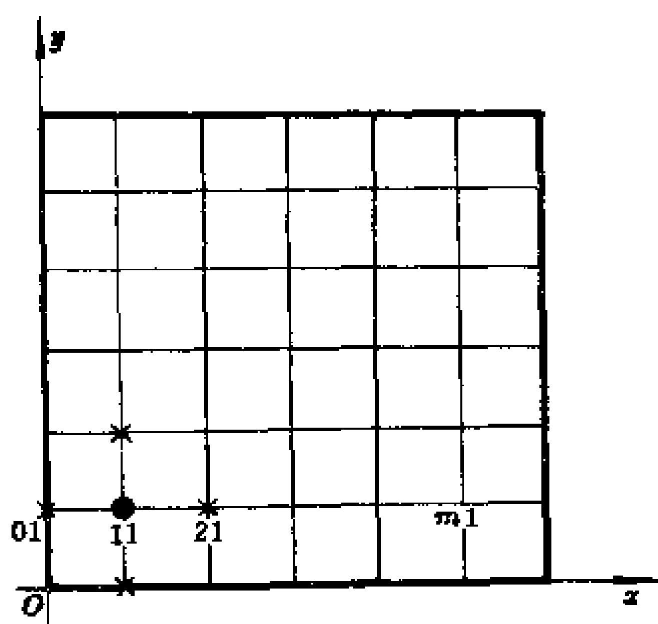


图6-17

从而对第一横排上第一个结点($i=1,k=1$)有

$$|e_{1,1}^{(1)}|\leqslant\frac{3}{4}\varepsilon=\left(1-\frac{1}{4}\right)\varepsilon$$

对此排上第二个结点($i=2,k=1$)，其四个邻点中必有一个是第一个结点，于是由(6.2.9)式有

$$|\varepsilon_{2,1}^{(1)}| \leqslant \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)\varepsilon+\frac{3}{4}\varepsilon=\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\varepsilon$$

同理，对于第三个结点，…，第 m 个结点，有

$$|\varepsilon_{3,1}^{(1)}| \leqslant \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\varepsilon+\frac{3}{4}\varepsilon=\left(1-\frac{1}{4^3}\right)\varepsilon$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\varepsilon_{m,1}^{(1)}| \leqslant \left(1-\frac{1}{4^m}\right)\varepsilon$$

记 $\alpha=1-\frac{1}{4^m}$，从上述估计式就得到第一横排上的所有内结点有估计式成立

$$|\varepsilon_{i,1}^{(1)}| \leqslant \alpha\varepsilon, \quad i=1,2,\cdots,m$$

对于第二横排，第三横排等等每一横排，都可利用上述方法得到完全同样的估计. 最后，我们得到在网格区域的一切结点上，都有下式成立

$$\max_{i,k}|\varepsilon_{i,k}^{(1)}| \leqslant \alpha\varepsilon$$

反复利用上述方法，就可得到在网格区域的一切结点上，都有下式成立

$$\max_{i,k}|\varepsilon_{i,k}^{(2)}| \leqslant \alpha^2\varepsilon,\ \max_{i,k}|\varepsilon_{i,k}^{(3)}| \leqslant \alpha^3\varepsilon,\ \cdots,\ \max_{i,k}|\varepsilon_{i,k}^{(n)}| \leqslant \alpha^n\varepsilon$$

因为 $\alpha=1-\frac{1}{4^m}$ 是一个小于 1 的正数，从上述最后一式可见，不论零次近似如何选取，当 $n\to\infty$ 时，$\max\limits_{i,k}|\varepsilon_{i,k}^{(n)}|\to 0$，这就证明了异步迭代法的收敛性.

值得注意的是，迭代法的收敛性虽然是和零次近似 $\{U_{i,k}^{(0)}\}$ 的选择无关的，但是选择一个较好的零次近似，就可适当减少所需要的迭代次数，这也就需要在计算过程中引起注意.

第六章 习 题

1 在正方形区域：$0\leqslant x\leqslant \pi,\ 0\leqslant y\leqslant \pi$ 上，考察拉普拉斯方程的下述定

解问题：

$$
\begin{cases}
\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\
x=0,\ x=\pi,\ y=0;\ u=0 \\
y=\pi:\ u_y=\sin x
\end{cases}
$$

（1）证明其精确解为 $u(x,\ y)=\dfrac{\sin x\cdot \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}\pi}$

（2）列出求解此问题的差分方程

2　设区域 G 是边长为 1，中心在原点的正方形，用差分方法求出拉普拉斯方程：　$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的数值解，其边界条件为 $u|_{x=\pm\frac{1}{2}}=-1$，$u|_{y=\pm\frac{1}{2}}=1$。取 $h=0.1$，$l=0.05$，用简单迭代法和赛德尔迭代法计算近似解 $U_{i,k}$。

3　在正方形区域：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上考虑泊松方程的下述定解问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,\ y) \\
u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=0 \\
\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\right)\right|_{y=1}=g(x)
\end{cases}
$$

其中 $f(x,\ y)$、$g(x)$ 均为已知函数。试列出求解此问题的差分方程。

4　试建立定解问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ 0<x<4,\ 0<y<3 \\
u|_{x=0}=y(3-y),\ u|_{x=4}=0 \\
u|_{y=0}=\sin\dfrac{\pi}{4}x,\ u|_{y=3}=0
\end{cases}
$$

的第一种五点差分格式方程，取步长 $h=l=1$。利用简单迭代法，赛德尔迭代法，逐次超松驰迭代法分别计算出一次近似解 $U^{(1)}_{i,k}$。取步长 $h=1$，$l=0.1$，计算近似值 $U_{i,k}$。

5　在正方形区域：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 内，用网格步长 $h=l=\dfrac{1}{3}$。试将差分方程组(6.2.1)，(6.2.2)写成为一般线性代数方程组的形式，并说明相应系数矩阵的特征。

6　在正方形区域：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 内，试用第一、二种五点差分格式数值解泊松方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\right)\Big|_{x=0} = 0, \ u|_{x=1} = 1 \\ u|_{y=0} = u|_{y=1} = 1 \end{cases}$$

取 $h = \frac{1}{3}$, $l = \frac{1}{6}$.

7　求在正方形区域：$-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 上的泊松方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + u\right)\Big|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

的数值解．此处 n 为外法线方向，Γ 为四条边 $x = \pm 1$, $y = \pm 1$．取步长 $h = l = \frac{1}{3}$.

8　在圆 $x^2 + y^2 \leqslant 16$ 内，试用第一、二种五点差分格式数值解拉普拉斯方程第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u|_{\Gamma} = x^2 y^2 \end{cases}$$

其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 = 16$，取步长 $h = 1$.

第七章　热传导方程和波动方程的差分解法

这章里我们着重研究一维热传导方程的混合边值问题

$$\begin{cases} Lu=\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),0<x<l,0<t<T \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l \\ u|_{x=0}=\mu_1(t),\quad u|_{x=l}=\mu_2(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T \end{cases} \tag{7.1.1}$$

以及一维波动方程的混合边值问题

$$\begin{cases} Lu=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),0<x<l,0<t<T \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \\ u|_{x=0}=\mu_1(t),\quad u|_{x=l}=\mu_2(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T \end{cases} \tag{7.1.2}$$

分别构造它们的差分格式，讨论收敛性及稳定性等问题．其中 f、φ、ψ、μ_1、μ_2 都是已知函数，且有一定的光滑性，以保证近似解的收敛性与差分格式的稳定性．对于这样典型问题的讨论，一是简单方便，二是所述的方法便于推广到更一般的情况．

§ 7-1　热传导方程的差分解法

1　显式、隐式差分格式的构造及其稳定性

(1) 显式差分格式

显式差分格式的构造　对于(7.1.1)式的混合边值问题，在前面利用分离变量法已经得到了它的精确解的表达式，但是要从这样的解式得到 u 的具体数值仍然是困难的．差分方法（或网格方

法)就是要在区域

$$G: \{0\leqslant x\leqslant l,\quad 0\leqslant t\leqslant T\}$$

中某些点上求出 u 的足够近似的数值. 用矩形网格覆盖区域 G, 如图 7-1所示. 在 x 方向网格直线把区间$[0, l]$分成 N等分, 每一

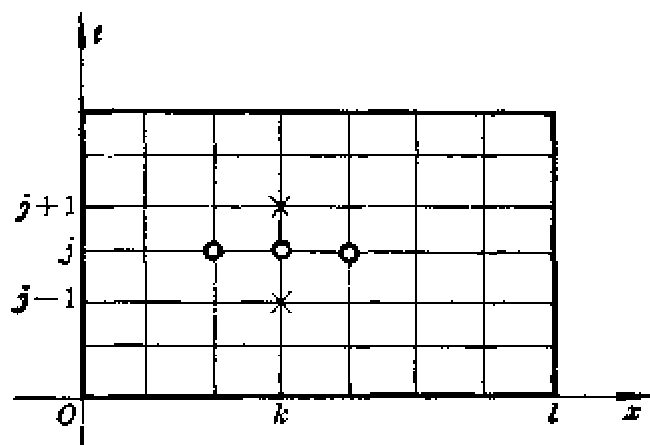


图 7-1

等分长度为 $h=l/N$. 沿 t 轴方向网格直线间距为τ. 以后均令 $x_k=kh(k=0,1,2,\cdots,N, Nh=l)$, $t_j=j\tau(j=0,1,2,\cdots, m_0, m_0=\left[\frac{T}{\tau}\right])$, 两族直线的交点$(x_k, t_j)=(kh, j\tau)$称为网格结点, 以$(k, j)$表示, 并以 $u_{k,j}$ 记 $u(x, t)$在点(x_k, t_j)上的值 $u(x_k, t_j)$.

在结点(k, j)上, 函数 $u(x, t)$的偏导数可用 u 在(k, j)及其附近结点上的值的差商近似表示. 由泰勒公式得出:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{k,j}=\dfrac{u_{k+1,j}-2u_{k,j}+u_{k-1,j}}{h^2}-\dfrac{h^2}{12}\dfrac{\partial^4 u(\bar{x}, t_j)}{\partial t^4}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (|\bar{x}-x_j|\leqslant h) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{k,j}=\dfrac{u_{k,j+1}-u_{k,j}}{\tau}-\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2 u(x_k, \bar{t})}{\partial t^2}, (t_j\leqslant \bar{t}\leqslant t_{j+1}) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{k,j}=\dfrac{u_{k,j}-u_{k,j-1}}{\tau}+\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2 u(x_k, \bar{\bar{t}})}{\partial t^2}, (t_{j-1}\leqslant \bar{\bar{t}}\leqslant t_j) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{k,j}=\dfrac{u_{k,j+1}-u_{k,j-1}}{2\tau}-\dfrac{\tau^2}{6}\dfrac{\partial^2 u(x_k, t')}{\partial t^2}, (t_{j-1}\leqslant t'\leqslant t_{j+1})\end{cases}$$

(7.1.3)

而在(k, j)上 u 适合方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{k,j}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{k,j}=f_{k,j} \tag{7.1.4}$$

若将(7.1.3)中第一、二式代入(7.1.4)式，得到

$$(Lu)_{k,j}=\frac{u_{k,j+1}-u_{k,j}}{\tau}-a^2\frac{u_{k+1,j}-2u_{k,j}+u_{k-1,j}}{h^2}$$

$$-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_k,\tilde{t})}{\partial t^2}+\frac{a^2h^2}{12}\frac{\partial^4 u(\tilde{x},t_j)}{\partial x^4}=f_{k,j} \tag{7.1.5}$$

又在结点由初始条件及边界条件得出

$$\begin{cases}u_{k,0}=\varphi(kh), & k=0,1,2,\cdots,N\\ u_{0,j}=\mu_1(j\tau),\ u_{N,j}=\mu_2(j\tau), & j=0,1,2,\cdots,m_0\end{cases} \tag{7.1.6}$$

略去(7.1.5)中左边的最后两项，就得到用差分方法近似求解混合问题(7.1.1)的差分格式

$$\begin{cases}R_1^hU_{k,j}=\dfrac{U_{k,j+1}-U_{k,j}}{\tau}-a^2\dfrac{U_{k-1,j}-2U_{k,j}+U_{k+1,j}}{h^2}=f_{k,j}\\ \qquad\qquad\left(\begin{smallmatrix}k=1,2,\cdots,N-1\\ j=0,1,\cdots,m_0-1\end{smallmatrix}\right)\\ U_{k,0}=\varphi(kh),\ k=0,1,2,\cdots,N,\ K=l/N\\ U_{0,j}=\mu_1(j\tau),\ U_{N,j}=\mu_2(j\tau),\ j=0,1,2,\cdots,m_0\end{cases}$$

(7.1.7)

这个差分格式通常用下列图形 7-2 表示，图中点⊗表示方程是在这一点列出的，而画着○的点则是方程中用到的点。

记 $\lambda=a^2\frac{\tau}{h^2}$，则上述差分格式(7.1.7)可写成为

$$\begin{cases}U_{k,j+1}=\lambda U_{k+1,j}+(1-2\lambda)U_{k,j}+\lambda U_{k-1,j}+\tau f_{k,j}\\ \qquad\qquad\left(\begin{smallmatrix}k=1,2,\cdots,N-1\\ j=0,1,\cdots,m_0-1\end{smallmatrix}\right)\\ U_{k,0}=\varphi(kh),\ k=0,1,2,\cdots,N,\ h=l/N\\ U_{0,j}=\mu_1(j\tau),\ U_{N,j}=\mu_2(j\tau),\ j=0,1,2,\cdots,m_0\end{cases} \tag{7.1.8}$$

它表示第$(j+1)$排任一内结点之值依赖于第 j 排上相邻三个结点上的值，如图 7-2 所示。这里我们要求 $\varphi(0)=\mu_1(0)$，$\varphi(l)=$

$=\mu_2(0)$.

我们还可以看到，差分方程(7.1.8)可以按 t 增加的方向逐排求解．事实上，根据初始条件 $U_{k,0}=\varphi(kh)$ 及边界条件 $U_{0,j}=\mu_1(j\tau)$，$U_{N,j}=\mu_2(j\tau)$，可知道第 0 排上的 $U_{k,0}(k=0,1,2,\cdots,N)$ 的

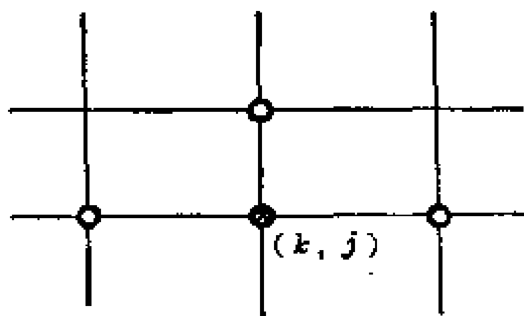


图 7-2

值，再用(7.1.8)的第一式，可以算出第一排上的 $U_{k,1}(k=1,2,\cdots,N-1)$ 的值；由此利用边界条件又可算出第二排上 $U_{k,2}(k=1,2,\cdots,N-1)$ 的值；如此继续下去，一直可以算出任何第 j 排的 $U_{k,j}(j=1,2,\cdots,N-1)$ 的值．这种差分格式(7.1.8)称为**显式差分格式**.

显式差分格式的稳定性　由差分格式(7.1.8)计算出来的并不是(7.1.8)的精确解 $U_{k,j}$．这是由于计算中有舍入误差(包含初始数据和边界条件的误差）的缘故．如果把计算出来的值叫做 $\tilde{U}_{k,j}$，则 $\tilde{U}_{k,j}$ 只能近似地满足差分格式(7.1.8)．实际计算表明当我们按某些格式进行计算时，当 j 增加(即当我们按一排一排结点计算下去)，算出的 $\tilde{U}_{k,j}$ 的可靠性很好，而在另外一些情况则可靠性很差．因此，通常我们说如果 $U_{k,j}$ 与 $\tilde{U}_{k,j}$ 之差 $e_{k,j}=\tilde{U}_{k,j}-U_{k,j}$ 当 j 增加时，有减少的趋势或至少不增加，我们就称这个格式是**稳定差分格式**．那末，在什么情况下所划分的差分格式是稳定性差分格式呢？此处我们不作仔细的讨论，只是给出使得差分格式稳定的充分条件：

如果

$$\lambda=a^2\frac{\tau}{h^2}\leqslant\frac{1}{2} \tag{7.1.9}$$

则差分格式(7.1.8)必为稳定性差分格式.

下面给出差分格式(7.1.8)的稳定性证明. 为方便起见, 假定边界条件的计算是精确的, 只在初始层引入误差 $\varepsilon_{k,0}$, 而以后各层的计算所产生的误差 $\varepsilon_{k,j}$ 都是由于 $\varepsilon_{k,0}$ 的影响, 并未引入其它误差.

现给出稳定性的精确定义.

如果对于给定的任意小的正数 $\varepsilon>0$, 可以求得与 h、τ 无关的正数 $\delta>0$, 当

$$\sum_{k=1}^{N-1}\varepsilon_{k,0}^2\leqslant\delta$$

时, 对任意 $j(j\tau\leqslant T)$ 有不等式

$$\sum_{k=1}^{N-1}\varepsilon_{k,j}^2\leqslant\varepsilon$$

成立, 则称差分格式是**稳定的**. 其中 $\varepsilon_{k,j}=\widetilde{U}_{k,j}-U_{k,j}$, $\widetilde{U}_{k,j}$ 是差分方程组的近似解, $U_{k,j}$ 是差分方程组的精确解.

设初始条件计算在各节点上产生的误差为 $e_k(k=0,1,2,\cdots,N)$ 此时, 我们求得的差分方程的近似解 $\widetilde{U}_{k,j}$ 满足

$$\begin{cases}\widetilde{U}_{k,j+1}=\lambda\widetilde{U}_{k+1,j}+(1-2\lambda)\widetilde{U}_{k,j}+\lambda\widetilde{U}_{k-1,j}+\tau f_{k,j} & \begin{pmatrix}k=1,2,\cdots,N-1\\ j=0,1,\cdots,m_0-1\end{pmatrix}\\ \widetilde{U}_{k,0}=\varphi(kh)+e_k, \quad k=0,1,2,\cdots,N\\ \widetilde{U}_{0,j}=\mu_1(j\tau),\widetilde{U}_{N,j}=\mu_2(j\tau), \quad j=0,1,2,\cdots,m_0\end{cases}\tag{7.1.10}$$

从(7.1.8)、(7.1.10)可知, 误差 $\varepsilon_{k,j}$ 所满足的差分方程是

$$\begin{cases}\varepsilon_{k,j+1}=\lambda\varepsilon_{k+1,j}+(1-2\lambda)\varepsilon_{k,j}+\lambda\varepsilon_{k-1,j} & \begin{pmatrix}k=1,2,\cdots,N-1\\ j=0,1,\cdots,m_0-1\end{pmatrix}\\ \varepsilon_{k,0}=e_k, \quad k=0,1,2,\cdots,N\\ \varepsilon_{0,j}=\varepsilon_{N,j}=0, \quad j=0,1,2,\cdots,m_0-1\end{cases}\tag{7.1.11}$$

现在利用分离变量法求(7.1.11)中差分方程在齐次边界条件下的特解. 设

$$\begin{cases}\varepsilon_{k,j}=X(k)T(j)\\ T(0)=1\end{cases}\tag{7.1.12}$$

以此代入(7.1.11)中, 则有

$$X(k)T(j+1)=[\lambda X(k+1)+(1-2\lambda)X(k)+\lambda X(k-1)]T(j)$$

因而

$$\frac{T(j+1)}{T(j)}=\frac{\lambda X(k+1)+(1-2\lambda)X(k)+\lambda X(k-1)}{X(k)}$$

上式左端与 k 无关，而右端与 j 无关，因此左右两端同时等于一个与 k、j 无关的常数 β. 于是我们得到 $T(j)$、$X(k)$ 所满足的方程

$$\begin{cases}T(j+1)=\beta T(j),\ (j=0,1,2,\cdots,m_0-1)\\ T(0)=1\\ \lambda X(k+1)+(1-2\lambda-\beta)X(k)+\lambda X(k-1)=0\\ \qquad (k=1,2,\cdots,N-1)\end{cases}\tag{7.1.13}$$

由(7.1.11)中的边界条件得到

$$X(0)=0,\ X(N)=0\tag{7.1.14}$$

称问题

$$\begin{cases}\lambda X(k+1)+(1-2\lambda-\beta)X(k)+\lambda X(k-1)=0\\ X(0)=X(N)=0\end{cases}\tag{7.1.15}$$

为差分方程的**斯图姆-刘维尔问题**. 自然地称 β 是**特征值**, $X(k)$ 是**特征函数**(即特征向量 $X(1)$、$X(2)$, $\cdots$, $X(N-1)$).

从(7.1.13)中求得

$$T(j)=\beta^j\tag{7.1.16}$$

(7.1.15)中方程是二阶常系数差分方程, 可令其解为以下形式

$$X(k)=e^{mx_k}=e^{mkh}=q^k\tag{7.1.17}$$

其中 $q=e^{mh}$. 代入(7.1.15)中得到相应的特征方程

$$\lambda q^2+(1-2\lambda-\beta)q+\lambda=0\tag{7.1.18}$$

令

$$1-2\lambda-\beta=-2\lambda\cos\theta\tag{7.1.19}$$

则有

$$q^2-2q\cos\theta+1=0$$

此方程有二个根 q_1、q_2:

$$q_1=\frac{1}{q_2}=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$$

因而(7.1.15)中方程有如下通解

$$X(k)=C_1q_1^k+C_2q_2^k$$

或

$$X(k)=C_1'\cos k\theta+C_2'\sin k\theta\tag{7.1.20}$$

其中 C_1'、C_2' 是任意常数. 由(7.1.15)中的边界条件

$$X(0)=C_1'=0, \quad X(N)=C_2'\sin N\theta=0$$

可知 $N\theta=m\pi$, $m=1,2,\cdots,N-1$, 故有

$$X_m(k)=C_2'\sin\frac{mk\pi}{N}, \quad m=1,2,\cdots,N-1$$

为简单起见取 $C_2'=1$, 从而

$$X_m(k)=\sin\frac{mk\pi}{N}, \quad m=1,2,\cdots,N-1 \tag{7.1.21}$$

可以证明, 函数组 $\{X_m(k)\}(m=1,2,\cdots,N-1)$ 是一正交函数组:

$$\sum_{k=1}^{N-1}\sin\frac{sk\pi}{N}\cdot\sin\frac{lk\pi}{N}=\begin{cases}0, & s\neq l\\ \frac{N}{2}, & s=l\end{cases} \tag{7.1.22}$$

由(7.1.19)得出

$$\beta_m=1-4\lambda\sin^2\frac{m\pi}{2N}, \quad m=1,2,\cdots,N-1 \tag{7.1.23}$$

如此求得(7.1.11)中差分方程的特解如下:

$$\varepsilon_{k,j}^m=X_m(k)T_m(j)=\beta_m^j\sin\frac{mk\pi}{N} \tag{7.1.24}$$

此特解满足边界条件. 从而我们可求得(7.1.11)中差分方程的通解

$$\varepsilon_{k,j}=\sum_{m=1}^{N-1}a_m\varepsilon_{k,j}^m=\sum_{m=1}^{N-1}a_m\beta_m^j\sin\frac{mk\pi}{N} \tag{7.1.25}$$

其中系数 a_m 由(7.1.11)中初始条件确定后就得到差分方程问题(7.1.11)的解. 由(7.1.25)

$$\varepsilon_{k,0}=\sum_{m=1}^{N-1}a_m\sin\frac{mk\pi}{N} \tag{7.1.26}$$

以 $\sin\frac{mk\pi}{N}$ 乘上式两端, 按 k 从 1 到 $N-1$ 求和, 并利用(7.1.22)得出

$$\sum_{k=1}^{N-1}\varepsilon_{k,0}\sin\frac{mk\pi}{N}=a_m\sum_{k=1}^{N-1}\sin^2\frac{mk\pi}{N}=a_m\frac{N}{2}$$

于是

$$a_m=\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\varepsilon_{k,0}\sin\frac{mk\pi}{N}, \quad m=1,2,\cdots,N-1 \tag{7.1.27}$$

此外, a_m 还满足下面等式

$$\frac{N}{2}\sum_{m=1}^{N-1}a_m^2=\sum_{k=1}^{N-1}\varepsilon_{k,0}^2$$

现研究差分格式(7.1.8)的稳定性．因为

$$\varepsilon_{k,j}=\sum_{m=1}^{N-1}a_m\beta_m^j\sin\frac{mk\pi}{N}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{N-1}\varepsilon_{k,j}^2=\frac{N}{2}\sum_{m=1}^{N-1}a_m^2\beta_m^{2j} \tag{7.1.28}$$

由此可知，若

$$|\beta_m|\leqslant 1,\quad m=1,2,\cdots,N-1 \tag{7.1.29}$$

则有

$$\sum_{k=1}^{N-1}\varepsilon_{k,j}^2\leqslant\frac{N}{2}\sum_{m=1}^{N-1}a_m^2=\sum_{k=1}^{N-1}\varepsilon_{k,0}^2 \tag{7.1.30}$$

故当 $|\beta_m|\leqslant 1$ 时差分格式是稳定的．

由(7.1.23)式可知，当

$$0<\lambda\leqslant\frac{1}{2} \tag{7.1.31}$$

时，$|\beta_m|\leqslant 1$，即当条件(7.1.31)成立时差分格式是稳定的．证毕．

因此，(7.1.8)稳定性条件是(7.1.9)，亦即步长比 τ/h^2 必须限制在这一变化范围内，否则差分格式是不稳定的．

(7.1.8)的具体计算步骤如下：

1　给出 a, l, h, λ 及 t 方向要求计算的层数 M.

2　计算出 x 方向的等分数 N, $N=\frac{l}{h}$，以及 t 轴方向的步长

$$\tau=\lambda h^2/a^2。$$

3　计算结点坐标：　$x_k=kh$,　$t_j=j\tau$.

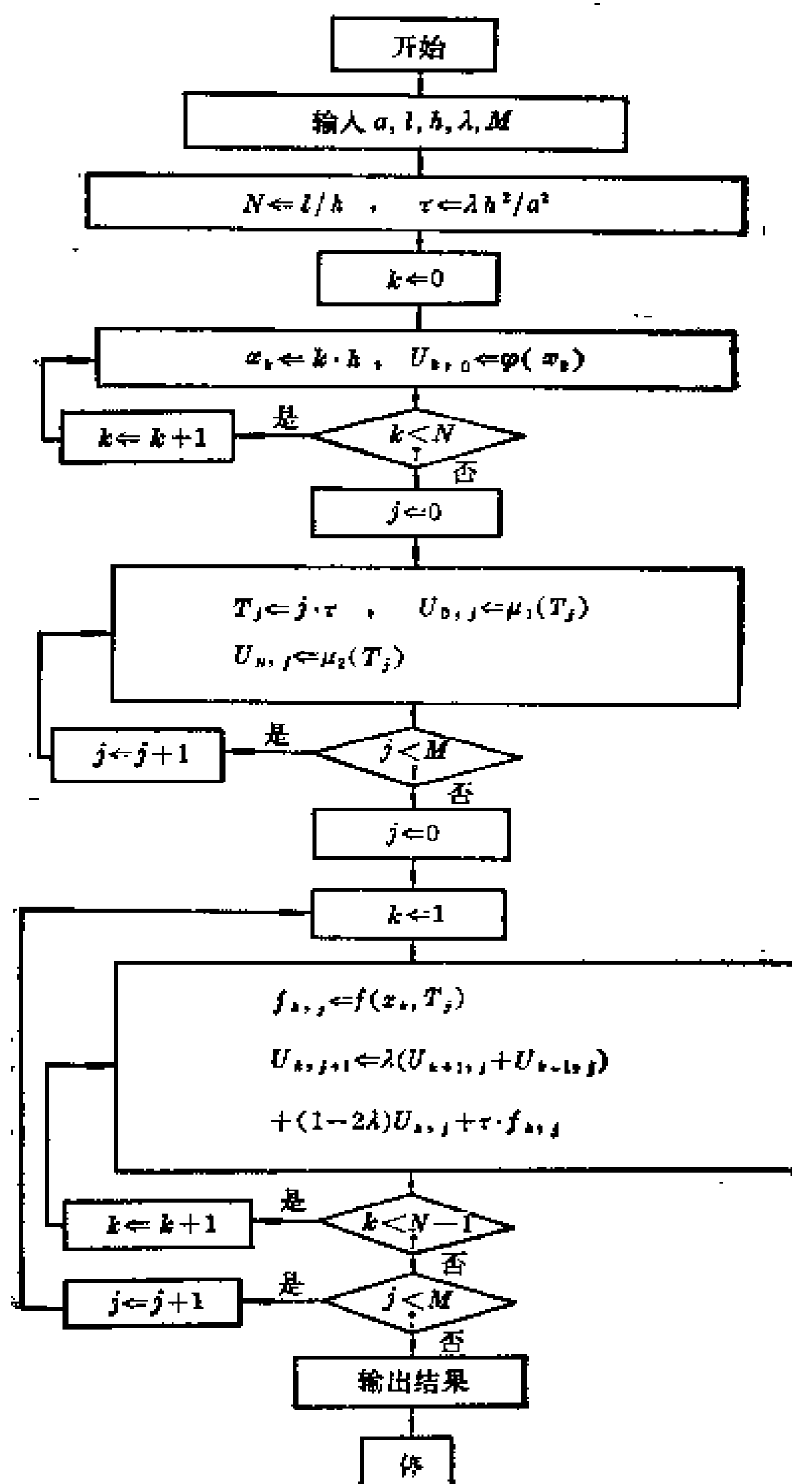
4　计算始值和边值：　$U_{k,0}=\varphi(x_k)$，$U_{0,j}=\mu_1(t_j)$，$U_{N,j}=\mu_2(t_j)$.

5　计算方程右端的函数值 $f(x_k, t_j)$，若方程是齐次的，那末

凡是 $f(x_k, t_j)$ 出现的地方都置以 0 即可。

6 利用(7.1.8)计算 $U_{k,j+1}$。

计算框图如下：



例 求热传导方程混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<1, \quad 0<t\\ u(x,0)=4x(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0, & 0\leqslant t\end{cases}$$

的数值解．取 $N=10$, $h=0.1$, 计算数值解到 $j=36$.

解 因为 $u(0,0)=u(1,0)=0$, 从初始条件及边界条件可知，解关于 $k=5$, 即直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 是对称的，所以必然有

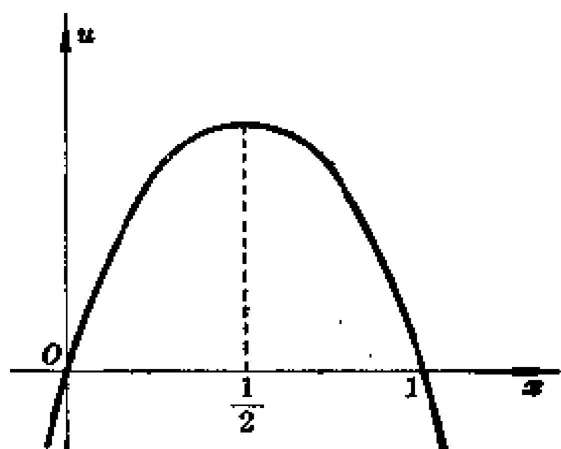


图 7-3

$$u_{1,j}=u_{9,j},\quad u_{2,j}=u_{8,j},\quad u_{3,j}=u_{7,j},$$

$$u_{4,j}=u_{6,j},\quad u_{5,j}$$

因此，只需计算

$$u_{k,j},\quad k=1,2,3,4,5;\quad j=0,1,\cdots,36$$

由初始条件 $u(x,0)=4x(1-x)$, 算出

$$u_{k,0}=4k\Delta x(1-k\Delta x)=4\times 0.1\cdot k\cdot(1-0.1k)$$

$$u_{0,j}=0,$$

$$u_{1,0}=0.4(1-0.1)=0.4\times 0.9=0.36,$$

$$u_{2,0}=0.8(1-0.2)=0.8\times 0.8=0.64,$$

$$u_{3,0}=1.2(1-0.3)=1.2\times 0.7=0.84,$$

$$u_{4,0}=1.6(1-0.4)=1.6\times 0.6=0.96,$$

$$u_{5,0}=2(1-0.5)=1$$

因为 $\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$, 取 $\lambda=\dfrac{1}{6}$, 由于 $\lambda=\dfrac{\tau}{h^2}$, 计算得 $\tau=\dfrac{1}{600}$, 由(7.1.8)得出

$$U_{k,j+1}=\frac{1}{6}U_{k+1,j}+\left(1-\frac{1}{3}\right)U_{k,j}+\frac{1}{6}U_{k-1,j}$$

从已知第 0 横排上 $U_{k,0}$ 的值计算第一横排上 $U_{k,1}$ 的值如下:

$k=1, j=0$ 时, 有

$$U_{1,1}=\frac{1}{6}U_{2,0}+\left(1-\frac{1}{3}\right)U_{1,0}+\frac{1}{6}U_{0,0}$$
$$=\frac{1}{6}\times 0.64+\frac{2}{3}\times 0.36+0$$
$$=0.34667$$

$k=2, j=0$ 时, 有

$$U_{2,1}=\frac{1}{6}U_{3,0}+\left(1-\frac{1}{3}\right)U_{2,0}+\frac{1}{6}U_{1,0}$$
$$=\frac{1}{6}\times 0.84+\frac{2}{3}\times 0.64+\frac{1}{6}\times 0.36$$
$$=0.62667$$

$k=3, j=0$ 时, 有

$$U_{3,1}=\frac{1}{6}U_{4,0}+\left(1-\frac{1}{3}\right)U_{3,0}+\frac{1}{6}U_{2,0}$$
$$=\frac{1}{6}\times 0.96+\frac{2}{3}\times 0.84+\frac{1}{6}\times 0.64$$
$$=0.82667$$

……………………………………………

对于上述计算, 引用算法语言编写成程序, 常采用电子计算机完成.

列出 $U_{k,j}$ 表

j \ k	0	1	2	3	4	5
0	0	0.36000	0.64000	0.84000	0.96000	1.00000
1	0	0.34667	0.62667	0.82667	0.94667	0.98667
2	0	0.33556	0.61333	0.81333	0.93333	0.97333
3	0	0.32593	0.60037	0.80000	0.92000	0.96000
…	…	…	…	…	…	…
34	0	0.18248	0.34696	0.47731	0.56088	0.58964
35	0	0.17948	0.34127	0.46951	0.55157	0.58005
36	0	0.17653	0.33568	0.46181	0.54276	0.57061

(2) 隐式差分格式

隐式差分格式的构造　用显式差分格式求解热传导方程的混合边值问题，优点是计算比较简单，但是必须满足稳定性条件，即 $\lambda=a^2\frac{\tau}{h^2}\leqslant\frac{1}{2}$，因此 t 方向的步长必须取得满足条件

$$\tau\leqslant\frac{h^2}{2a^2}$$

为了提高数值解的精度，必须缩少步长 h，此时 τ 相应地就要变小。由于差分方程是按 t 增大的方向逐排求解的，因此这种逐排求解的步骤必须重复多次，使计算时间大大加长。这是显式差分格式的很大缺点。为了避免这种缺点，下面提出一种隐式差分格式。

如果我们用(7.1.3)中的第一、三式代入方程(7.1.4)中，于是就得到

$$\begin{aligned}(Lu)_{k,j}=&\frac{u_{k,j}-u_{k,j-1}}{\tau}-a^2\frac{u_{k-1,j}-2u_{k,j}+u_{k+1,j}}{h^2}\\&+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2u(x_k,\tilde{t})}{\partial t^2}+a^2\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4u(\tilde{x},t_j)}{\partial x^4}\\=&f_{k,j}\end{aligned}\tag{7.1.32}$$

初始条件和边值条件仍然是(7.1.6)。略去上式左边最后的两项，这样就得出近似于混合问题(7.1.1)的差分格式

$$\begin{cases}R_2^hU_{k,j}=\dfrac{U_{k,j}-U_{k,j-1}}{\tau}-a^2\dfrac{U_{k-1,j}-2U_{k,j}+U_{k+1,j}}{h^2}=f_{k,j},\\\qquad\qquad(k=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots,m_0-1)\\U_{k,0}=\varphi(kh),\quad k=1,2,\cdots,N-1\\U_{0,j}=\mu_1(j\tau),U_{N,j}=\mu_2(j\tau),\quad j=0,1,2,\cdots,m_0\end{cases}\tag{7.1.33}$$

或者写成

$$\begin{cases} -\lambda U_{k-1,j+1}+(1+2\lambda)U_{k,j+1}-\lambda U_{k+1,j+1} \\ \quad =U_{k,j}+\tau f_{k,j+1}, \quad \left(\begin{smallmatrix} k=1,2,\cdots,N-1 \\ j=0,1,2,\cdots,m_0-1 \end{smallmatrix}\right) \\ U_{k,0}=\varphi(kh), \quad k=1,2,\cdots,N-1 \\ U_{0,j}=\mu_1(j\tau), U_{N,j}=\mu_2(j\tau), j=0,1,2,\cdots,m_0 \end{cases} \tag{7.1.34}$$

其中 $U_{k,j}$ 仍表示差分方程(7.1.33)的精确解，而 λ 仍由(7.1.9)式决定.

比较(7.1.32)与(7.1.33)可知差分格式(7.1.33)的截断误差为 $O(\tau)+O(h^2)$.

差分格式(7.1.33)可用图 7-4 表示.

差分格式 (7.1.34) 也是一组线性代数方程组，它不同于(7.1.8). (7.1.34)的第一式表示第 $j+1$ 排上相邻三结点之解值与第 j 排上一结点之解值之间的关系，如图 7-4 所示. 由此可知差分格式(7.1.33)虽然仍按 t 增加的方向来逐排求解，但已不能象显式格式那样直接由第 j 排的解值求得第 $j+1$ 排上的解值 $U_{k,j+1}$，而必须在已知了第 j 排上的解 $U_{k,j}$ 后，利用(7.1.34)的第一式及第 $j+1$ 排上的边值条件，通过求解下述线性代数方程组

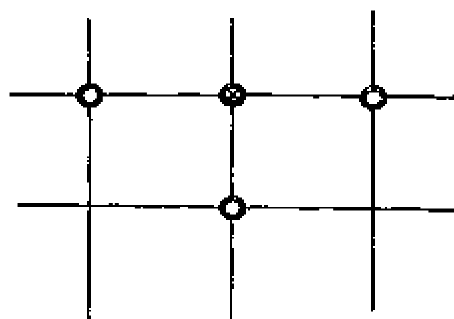


图 7-4

$$\begin{cases} -\lambda U_{k-1,j+1}+(1+2\lambda)U_{k,j+1}-\lambda U_{k+1,j+1}=U_{k,j}+\tau f_{k,j+1} \\ \qquad\qquad (k=1,2,\cdots,N-1) \\ U_{0,j+1}=\mu_1[(j+1)\tau] \\ U_{N,j+1}=\mu_2[(j+1)\tau] \end{cases} \tag{7.1.35}$$

来求得 $U_{k,j+1}$. 正是因为这样，称这种差分格式(7.1.33)为**隐式差分格式**.

由于 $U_{0,j+1}$，$U_{N,j+1}$ 已由边值条件确定，取 $U_{1,j+1}$，$U_{2,j+1}$，$\cdots$，

$U_{N-1,j+1}$ 为未知数，上面的方程组可改写成

$$
\begin{cases}
(1+2\lambda)U_{1,j+1}-\lambda U_{2,j+1} = U_{1,j+1}+\lambda\mu_1[(j+1)\tau] \\
\qquad\qquad + \tau f_{1,j+1} \\
-\lambda U_{1,j+1}+(1+2\lambda)U_{2,j+1}-\lambda U_{3,j+1} = U_{2,j}+\tau f_{2,j+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\lambda U_{N-3,j+1}+(1+2\lambda)U_{N-2,j+1} \\
-\lambda U_{N-1,j+1} \qquad U_{N-2,j}+f_{N-2,j+1} \\
-\lambda U_{N-2,j+1}+(1+2\lambda)U_{N-1,j+1} = U_{N-1,j}+\lambda\mu_2[(j+1)\tau] \\
\qquad\qquad +\tau f_{N-1,j+1}
\end{cases}
\tag{7.1.36}
$$

记 $N-1$ 阶方阵

$$
A=\begin{bmatrix}
1+2\lambda & -\lambda & & & & \\
-\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & & \mathbf{0} & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & \mathbf{0} & & \ddots & 1+2\lambda & -\lambda \\
 & & & & -\lambda & 1+2\lambda
\end{bmatrix}
\tag{7.1.37}
$$

及 $N-1$ 维向量

$$
U_j=\begin{bmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ \vdots \\ U_{N-1,j} \end{bmatrix},\qquad
F_{j+1}=\begin{bmatrix} \lambda\mu_1[(j+1)\tau]+\tau f_{1,j+1} \\ \tau f_{2,j+1} \\ \vdots \\ \tau f_{N-2,j+1} \\ \lambda\mu_2[(j+1)\tau]+\tau f_{N-1,j+1} \end{bmatrix}
\tag{7.1.38}
$$

于是方程组(7.1.36)可简写成为如下的向量形式:

$$
AU_{j+1}=U_j+F_{j+1} \qquad (j=0,1,2,\cdots) \tag{7.1.39}
$$

注意到

$$U_0=\begin{bmatrix}\varphi(\tau)\\ \varphi(2\tau)\\ \vdots\\ \varphi[(N-1)\tau]\end{bmatrix} \tag{7.1.40}$$

由于 U_0, F_1已由(7.1.38),(7.1.40)所确定,故由

$$AU_1=U_0+F_1 \tag{7.1.41}$$

可定出 $t=\tau$ 排上的结点上的解值

$$U_1=\begin{bmatrix}U_{1,1}\\ U_{2,1}\\ \vdots\\ U_{N-1,1}\end{bmatrix}$$

再由

$$AU_2=U_1+F_2 \tag{7.1.42}$$

可定出 $t=2\tau$ 排上的结点上的解值

$$U_2=\begin{bmatrix}U_{1,2}\\ U_{2,2}\\ \vdots\\ U_{N-1,2}\end{bmatrix}$$

一般说来,由

$$AU_j=U_{j-1}+F_j \tag{7.1.43}$$

可定出 $t=j\tau$ 排上的结点上的解值

$$U_j=\begin{bmatrix}U_{1,j}\\ U_{2,j}\\ \vdots\\ U_{N-1,j}\end{bmatrix}$$

等等.

隐式差分格式的稳定性 在考察差分格式(7.1.34)的稳定性

时，我们叙述一个稳定性原理：隐式差分格式(7.1.34)对任何$\lambda>0$的值都是稳定的。此时，对步长比$\lambda=a^2\frac{\tau}{h^2}$的任何值，差分格式(7.1.34)都稳定，我们称之为**无条件稳定**。

下面证明差分格式(7.1.34)的稳定性。从(7.1.34)可知，误差$\varepsilon_{k,j}$应满足差分方程

$$\begin{cases}-\lambda\varepsilon_{k-1,j}+(1+2\lambda)\varepsilon_{k,j}-\lambda\varepsilon_{k+1,j}=\varepsilon_{k,j-1} & \left(\substack{k=1,2,\cdots,N-1\\ j=1,2,\cdots,m_0-1}\right)\\ \varepsilon_{k,0}=\varepsilon_k, & (k=1,2,\cdots,N-1)\\ \varepsilon_{0,j}=\varepsilon_{N,j}=0, & (j=0,1,2,\cdots,m_0)\end{cases} \tag{7.1.44}$$

从显示格式(7.1.8)的稳定性分析中我们看到，为了研究差分格式关于初始误差是否稳定，只需研究相应的差分方程在齐次边界条件下的特解$\varepsilon_{k,j}=T(j)X(k)=\beta^jX(k)$随着计算步数$j$的增多是否增长即可，这是因为我们所研究的方程是线性常系数的，它的解可由特解叠加而成。在特解$\varepsilon_{k,j}=\beta^jX(k)$中，$X(k)$总具有$\sin\alpha x_k$或$e^{i\alpha x_k}$的形式，因此，又可将稳定性问题归结为判定$\varepsilon_{k,j}=\beta^j\cdot X(k)$中$\beta$按模是否不大于1，这样就使问题大大简化了。

求(7.1.44)中方程满足边界条件的特解如下：

$$\varepsilon_{k,j}^{(m)}=\beta_m^j\sin\frac{mk\pi}{N} \tag{7.1.45}$$

代入(7.1.44)中的方程，得出

$$\beta_m=\frac{1}{1+4\lambda\sin^2\frac{m\pi}{2N}},\quad m=1,2,\cdots,N-1 \tag{7.1.46}$$

由此可知，不论步长比λ如何，都有

$$0<\beta_m<1 \tag{7.1.47}$$

所以隐式差分格式(7.1.34)不论λ如何都是稳定的。

下面我们介绍用追赶法求解(7.1.34)的具体计算步骤，假定方程是非齐次的，它可写成如下的形式：

$$\begin{cases} U_{0,j}=\mu_1(j\tau) & (i_0) \\ -\lambda U_{0,j}+(1+2\lambda)U_{1,j}-\lambda U_{2,j}=U_{1,j-1}+\tau f_{1,j} & (i_1) \\ -\lambda U_{1,j}+(1+2\lambda)U_{2,j}-\lambda U_{3,j}=U_{2,j-1}+\tau f_{2,j} & (i_2) \\ -\lambda U_{2,j}+(1+2\lambda)U_{3,j}-\lambda U_{4,j}=U_{3,j-1}+\tau f_{3,j} & (i_3) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -\lambda U_{N-2,j}+(1+2\lambda)U_{N-1,j}-\lambda U_{N,j} & \\ \qquad =U_{N-1,j-1}+\tau f_{N-1,j} & (i_{N-1}) \\ U_{N,j}=\mu_2(j\tau) & \end{cases}$$

$$j=1,2,\cdots$$

由第二个方程(i_1)得

$$U_{1,j}=\frac{\lambda}{1+2\lambda}U_{2,j}+\frac{1}{1+2\lambda}(\lambda U_{0,j}+U_{1,j-1}+\tau f_{1,j})$$

令 $Q_0=U_{0,j}=\mu_1(j\tau)$，$P_1=1+2\lambda$，$Q_1=(\lambda Q_0+U_{1,j-1}+\tau f_{1,j})/P_1$，则有

$$U_{1,j}=\frac{\lambda}{P_1}U_{2,j}+Q_1$$

将 $U_{1,j}$ 表达式代入方程(i_2)得

$$-\lambda\left(\frac{\lambda}{P_1}U_{2,j}+Q_1\right)+P_1U_{2,j}-\lambda U_{3,j}=U_{2,j-1}+\tau f_{2,j}$$

$$\left(P_1-\frac{\lambda^2}{P_1}\right)U_{2,j}=\lambda U_{3,j}+\lambda Q_1+U_{2,j-1}+\tau f_{2,j}$$

令 $P_2=P_1-\dfrac{\lambda^2}{P_1}$，$Q_2=\dfrac{1}{P_2}(\lambda Q_1+U_{2,j-1}+\tau f_{2,j})$，则上式变为

$$U_{2,j}=\frac{\lambda}{P_2}U_{3,j}+Q_2$$

将 $U_{2,j}$ 表达式代入(i_3)得

$$U_{3,j}=\frac{\lambda}{P_3}U_{4,j}+Q_3$$

$$P_3=P_1-\frac{\lambda^2}{P_2},\ Q_3=(\lambda Q_2+U_{3,j-1}+\tau f_{3,j})/P_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般地，

$$U_{N-1,j}=\frac{\lambda}{P_{N-1}}U_{N,j}+Q_{N-1}$$

$$P_{N-1}=P_1-\frac{\lambda^2}{P_{N-2}},$$

$$Q_{N-1}=(\lambda Q_{N-2}+U_{N-1,j-1}+\tau f_{N-1,j})/P_{N-1}$$

这样，方程(7.1.34)就变成下列便于用计算机求解的递推方程组

$$U_{k,j}=\frac{\lambda}{P_k}U_{k+1,j}+Q_k,\qquad k=1,2,\cdots,N-1$$

其中

$$P_1=1+2\lambda,\quad P_k=P_1-\frac{\lambda^2}{P_{k-1}},\quad Q_0=U_{0,j},$$

$$Q_k=(\lambda Q_{k-1}+U_{k,j-1}+\tau f_{k,j})/P_k$$

具体计算步骤如下：

1　给出 a, l, h, λ，以及 t 方向所需要计算的层数 M。

2　计算 x 方向等分数 N，以及 t 方向的步长 τ

$$N=\frac{l}{h},\qquad \tau=\frac{\lambda h^2}{a^2}$$

3　计算结点坐标

$$x_k=kh,\ t_j=j\tau$$

4　计算初值与边值

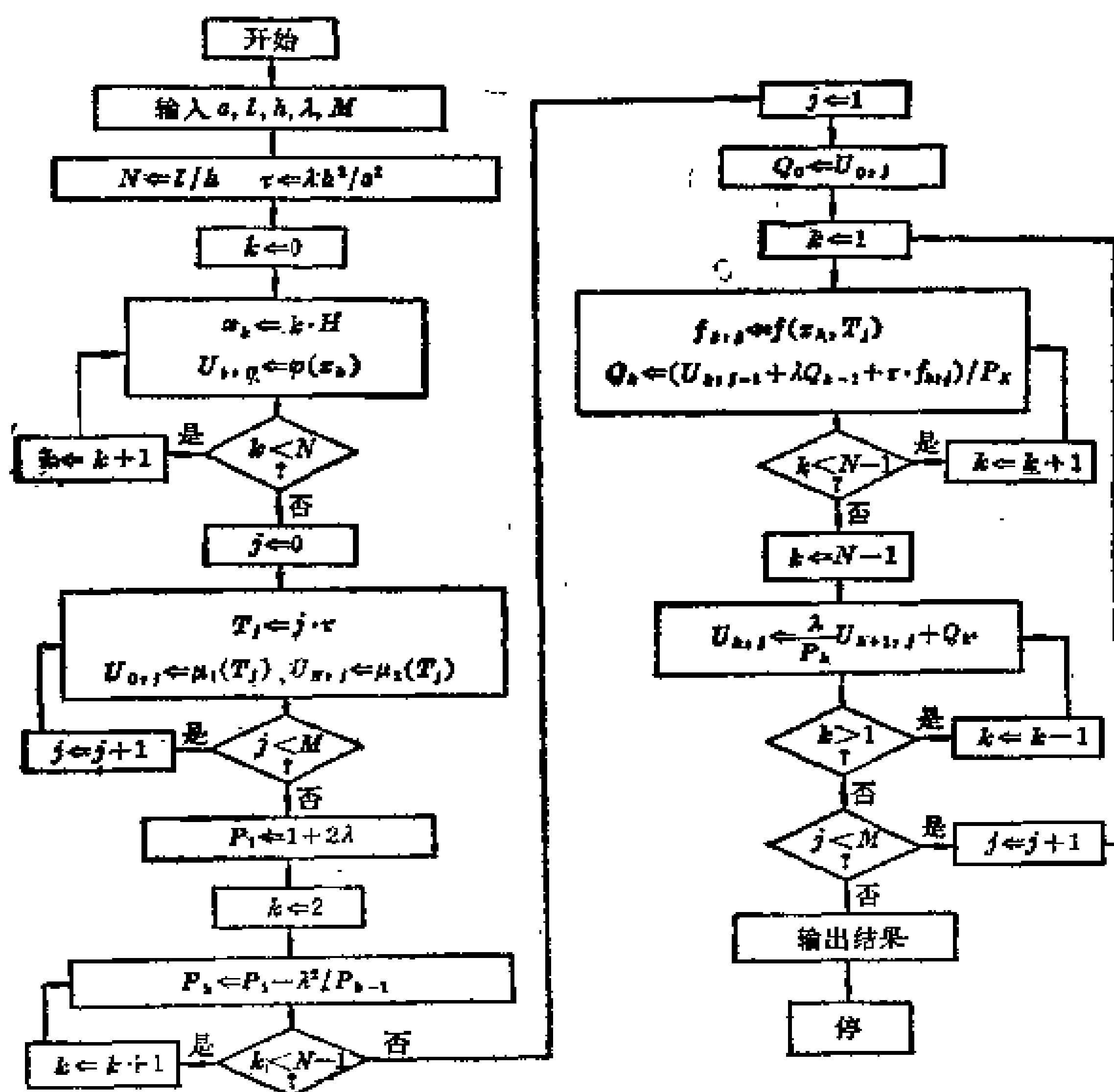
$$U_{k,0}=\varphi(x_k),\quad U_{0,j}=\mu_1(t_j),\quad U_{N,j}=\mu_2(t_j)$$

5　计算 P_k 与 Q_k（追）。

6　由 $U_{N,j}=\mu_2(t_j)$ 开始利用 $U_{k,j}=\dfrac{\lambda}{P_k}U_{k+1,j}+Q_k$ 倒推求 $U_{k,j}$（赶）。

如果是齐次方程，只需 $f_{k,j}$ 所在的位置换为 0 即可。

计算框图如下：



(3) 六点差分格式(crank-Nicholson 格式)

从(7.1.5)与(7.1.32)可知用差分格式去替代偏微分方程.产生的截断误差 $R_{k,j}=O(\tau)+O(h^2)$,即截断误差对 τ 是一阶的、对 h 是二阶的.如果用六点差分格式,产生的截断误差 $R_{k,j}=O(\tau^2)+O(h^2)$,即截断误差对 τ 是二阶的,提高了一阶,对 h 仍为二阶的。

利用$\dfrac{\partial u}{\partial t}$的中心差分

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{k,j+\frac{1}{2}}=\frac{u_{k,j+1}-u_{k,j}}{\tau}-\frac{\tau^2}{24}\frac{\partial^3 u(x_k,t'')}{\partial t^3},$$

$$\left|t''-\left(t_j+\frac{\tau}{2}\right)\right|<\frac{\tau}{2} \tag{7.1.48}$$

在点$\left(x_k, t_j+\frac{\tau}{2}\right)$列差分方程，如图 7-5．由泰勒公式得出

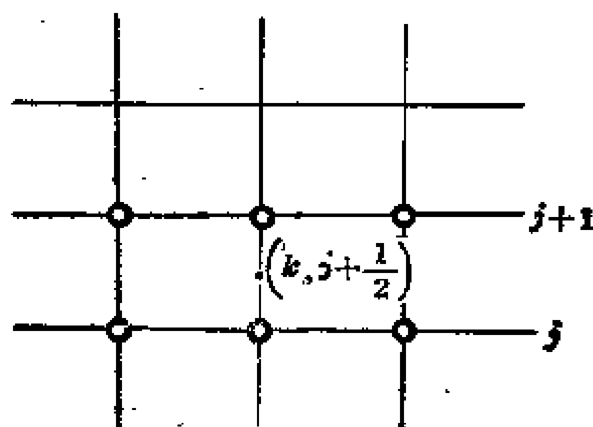


图　7-5

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{k,j+1}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{k,j+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)_{k,j+\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{\tau^2}{8}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\right)(x_k, \xi_1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{k,j}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{k,j+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)_{k,j+\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{\tau^2}{8}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\right)(x_k, \xi_2)$$

其中

$$\xi_1=t_{j+\frac{1}{2}}+\theta_1\frac{\tau}{2},\quad \xi_2=t_j+\theta_2\frac{\tau}{2},\quad 0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1$$

把前两式相加后再利用(7.1.3)中第一式得出

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{k,j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2h^2}[(u_{k+1,j+1}-2u_{k,j+1}+u_{k-1,j+1})$$
$$+(u_{k+1,j}-2u_{k,j}+u_{k-1,j})]$$
$$-\frac{h^2}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1, t_{j+1})-\frac{h^2}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2, t_j)$$
$$-\frac{\tau^2}{16}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\right)(x_k, \xi_1)$$

$$-\frac{\tau^2}{16}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)(x_k, \zeta_2) \tag{7.1.49}$$

在点$\left(k, j+\frac{1}{2}\right)$上$u$适合方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{k,j+\frac{1}{2}} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{k,j+\frac{1}{2}} = f_{k,j+\frac{1}{2}} \tag{7.1.50}$$

用(7.1.48),(7.1.49)代入(7.1.50)中得出

$$\begin{aligned}(LU)_{k,j} = & \frac{u_{k,j+1}-u_{k,j}}{\tau} - \frac{1}{2}a^2\left[\frac{u_{k+1,j+1}-2u_{k,j+1}+u_{k-1,j+1}}{h^2}\right. \\ & \left.+\frac{u_{k+1,j}-2u_{k,j}+u_{k-1,j}}{h^2}\right] + \frac{h^2}{24}a^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)(\xi_1, t_{j+1}) \\ & + \frac{h^2}{24}a^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)(\xi_2, t_j) + \frac{\tau^2}{16}a^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)(x_k, \zeta_1) \\ & + \frac{\tau^2}{16}a^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)(x_k, \zeta_2) - \frac{\tau^2}{24}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)(x_k, t'') \\ = & f_{k,j+\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{7.1.51}$$

略去上式中左边最后五项后,就得出近似于混合边值问题(7.1.1)的差分格式

$$\begin{cases}\dfrac{U_{k,j+1}-U_{k,j}}{\tau} - \dfrac{1}{2}a^2\left[\dfrac{U_{k+1,j+1}-2U_{k,j+1}+U_{k-1,j+1}}{h^2}\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{U_{k-1,j}-2U_{k,j}+U_{k-1,j}}{h^2}\right] = f_{k,j+\frac{1}{2}} \\ \qquad (k=1,2,\cdots,N-1;\ j=0,1,2,\cdots,m_0-1) \\ U_{k,0}=\varphi(kh), \quad k=1,2,\cdots,N-1 \\ U_{0,j}=\mu_1(j\tau), \quad U_{N,j}=\mu_2(j\tau), \quad j=0,1,2,\cdots,m_0\end{cases} \tag{7.1.52}$$

令$\lambda = a^2\frac{\tau}{h^2}$,则(7.1.52)可写成为

$$\begin{cases} -\lambda U_{k-1,j+1}+2(1+\lambda)U_{k,j+1}-\lambda U_{k+1,j+1} \\ \quad =\lambda U_{k-1,j}+2(1-\lambda)U_{k,j}+\lambda U_{k+1,j}+2\tau f_{k,j+\frac{1}{2}} \\ \quad\quad (k=1,2,\cdots,N-1;\ j=0,1,2,\cdots,m_0-1) \\ U_{k,0}=\varphi(kh),\quad k=1,2,\cdots,N-1 \\ U_{0,j}=\mu_1(j\tau),\quad U_{N,j}=\mu_2(j\tau),\quad j=0,1,2,\cdots,m_0 \end{cases} \tag{7.1.53}$$

差分格式(7.1.53)是隐式差分格式，逐排解一线性代数方程组求得(7.1.1)的解的近似值．此时它的截断误差为 $R_{k,j}=O(\tau^2)+O(h^2)$，它比前一隐式差分格式更加精确地逼近微分方程．由于在建立差分方程时需要用到它的邻近六个点，故称为**六点差分格式**．

六点差分格式的稳定性　六点差分格式(7.1.53)对任何 $\lambda>0$ 的值都是稳定的，称此为**无条件稳定性**．

下面证明差分格式(7.1.53)的稳定性．从(7.1.53)可知，误差 $\varepsilon_{k,j}$ 应满足差分方程

$$\begin{cases} -\lambda\varepsilon_{k-1,j+1}+2(1+\lambda)\varepsilon_{k,j+1}-\lambda\varepsilon_{k+1,j+1}=\lambda\varepsilon_{k-1,j}+2(1-\lambda)\varepsilon_{k,j}+\lambda\varepsilon_{k+1,j} \\ \quad\quad (k=1,2,\cdots,N-1,\ j=0,1,2,\cdots,m_0-1) \\ \varepsilon_{k,0}=\varepsilon_k,\ (k=0,1,2,\cdots,N) \\ \varepsilon_{0,j}=\varepsilon_{N,j}=0,\ (j=0,1,2,\cdots,m_0) \end{cases} \tag{7.1.54}$$

求(7.1.54)中方程满足边界条件的如下形式的特解

$$\varepsilon_{k,j}^{(m)}=\beta_m^j\sin\frac{mk\pi}{N} \tag{7.1.55}$$

以此式代入(7.1.54)的方程中，得出

$$\beta_m=\frac{1-2\lambda\sin^2\dfrac{m\pi}{2N}}{1+2\lambda\sin^2\dfrac{m\pi}{2N}},\quad m=1,2,\cdots,N-1 \tag{7.1.56}$$

因此不论 λ 如何，

$$|\beta_m|<1,\ m=1,2,\cdots,N-1$$

所以六点差分格式(7.1.53)是稳定的．证毕．

为便于实际计算，将(7.1.53)作如下的简化．令 $P_1=\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}$，则(7.1.53)可以化为

$$U_{k,j+1}=P_1U_{k+1,j+1}+P_1(U_{k+1,j}+U_{k-1,j}+U_{k-1,j+1})$$
$$+\frac{2P_1}{\lambda}[(1-\lambda)U_{k,j}+\tau f_{k,j+\frac{1}{2}}]$$
$$k=1,2,\cdots,N-1,\ j=0,1,2,\cdots,m_0-1$$

引进记号 $P_0=0,\ Q_{0,j}=U_{0,j+1}=\mu_1(t_{j+1})$，则上式即变成便于计算的形式

$$U_{k,j+1}=P_kU_{k+1,j+1}+Q_{k,j},$$
$$k=1,2,\cdots,N-1,\ j=0,1,2,\cdots,m_0-1$$

其中 P_k，$Q_{k,j}$ 可以通过下列递推公式求出

$$P_k=\frac{P_1}{1-P_1P_{k-1}}$$

$$Q_{k,j}=\frac{P_1(U_{k+1,j}+U_{k-1,j}+Q_{k-1,j})+\frac{2P_1}{\lambda}[(1-\lambda)U_{k,j}+\tau f_{k,j+\frac{1}{2}}]}{1-P_1P_{k-1}}$$
$$k=1,2,\cdots,N-1,\quad j=0,1,2,\cdots,m_0-1$$

计算步骤如下：

1　给出 a,l,h,λ 及 t 方向需要计算的层数 T_0．

2　计算 N 及 τ：$N=\frac{l}{h}$，$\tau=\frac{\lambda h^2}{a^2}$．

3　计算 x_k 及初值 $U_{k,0}$：　$x_k=kh$，$U_{k,0}=\varphi(x_k)$．

4　计算 t_j 及边值 $U_{0,j}$，$U_{N,j}$：

$$t_j=j\tau,\quad U_{0,j}=\mu_1(t_j),\quad U_{N,j}=\mu_2(t_j)$$

5　从 $P_0=0$，$Q_{0,j}=\mu_1(t_{j+1})$出发用递推法计算 P_k，$Q_{k,j}$，(追)．

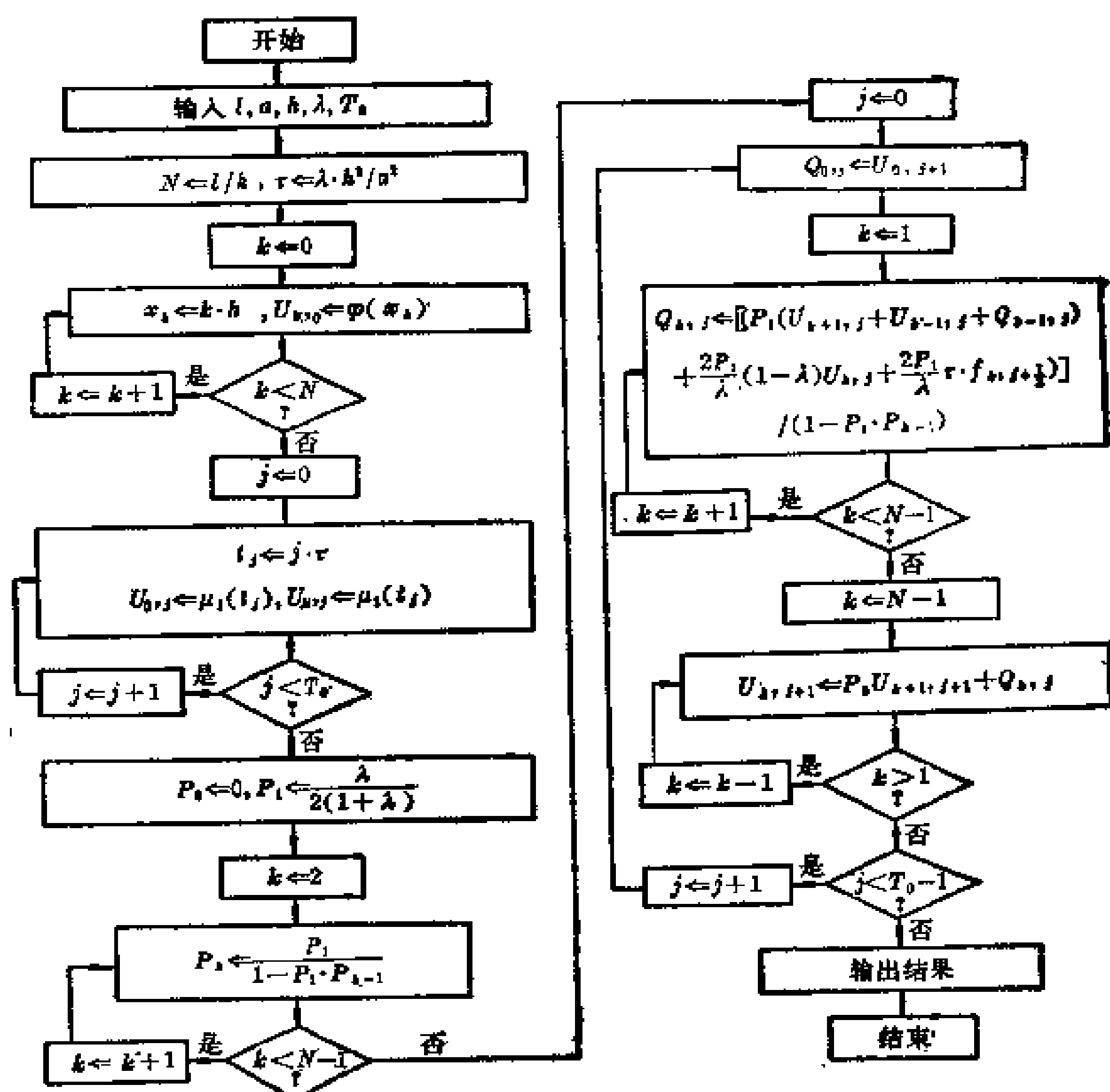
6　从 $U_{N,j+1}=\mu_2(t_{j+1})$出发，利用

$$U_{k,j+1}=P_kU_{k+1,j+1}+Q_{k,j},$$

$$k=N-1,N-2,\cdots,2,1,\quad j=0,1,2,\cdots,m_0-1$$

倒推求 $U_{k,j+1}$，（赶）。

计算框图如下



例　用显式、隐式差分格式数值计算热传导方程混合问题①

---

① 近藤次郎，応用数学 2＝偏微分方程式，1979 年。

$$\begin{cases} Lu=\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \\ u(x,0)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1-x, & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} \\ u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0 \end{cases} \tag{7.1.57}$$

解 (7.1.57)的显式差分格式是

$$\begin{cases} U_{k,j+1}=\lambda U_{k+1,j}+(1-2\lambda)U_{k,j}+\lambda U_{k-1,j} & \left(\begin{smallmatrix} k=1,2,\cdots,N-1 \\ j=0,1,\cdots,m_0-1 \end{smallmatrix}\right) \\ U_{k,0}=\varphi(kh), \quad k=0,1,2,\cdots,N \\ U_{0,j}=U_{N,j}=0, \quad j=0,1,2,\cdots,m_0 \end{cases} \tag{7.1.58}$$

其中 $\lambda=\frac{\tau}{h^2}$. 混合问题(7.1.57)的付里叶级数精确解是

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-(2k+1)^2\pi^2 t}\cdot\sin(2k+1)\pi x \tag{7.1.59}$$

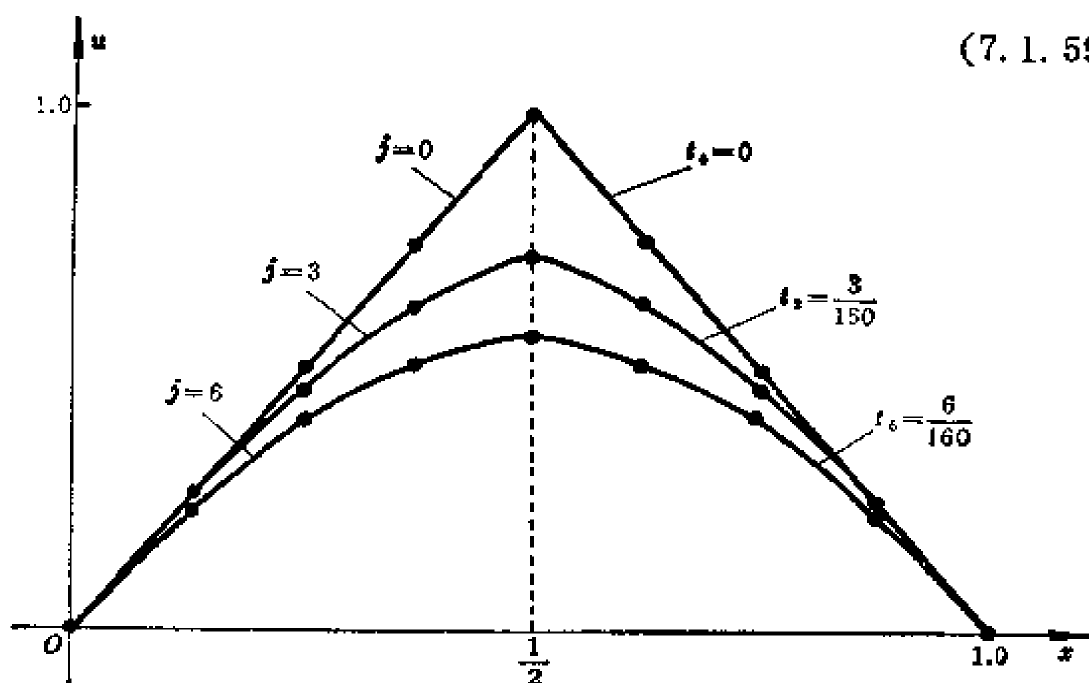


图 7-6

$h=\frac{1}{8}, \tau=\frac{1}{160}$

现取 $\lambda=\frac{\tau}{h^2}=0.4$, $h=\frac{1}{8}$, $\tau=\frac{1}{160}$. 我们按差分格式(7.1.58)计算出 $U_{k,j}$ 在 $j=0,3,6$ 诸排结点上的点，同微分方程的精确解 $u(x,t)$[(7.1.59)]的值比较，其结果用图 7-6 表示，其中曲线表示 $u(x_k,t_j)$，点子表示 $U_{k,j}$. 曲线是对称于 $x=\frac{1}{2}$的，$U_{k,j}$ 与 $u(x_k,t_j)$符合得很好.

如取$\lambda=\frac{\tau}{h^2}=0.8\left(>\frac{1}{2}\right)$, $h=\frac{1}{16}$, $\tau=\frac{1}{320}$, 仍按此方法计算，并把结果画出图来，可以从图 7-7 看出 $j=1$ 排上的结点 $U_{k,j}$ 和 $u(x_k,t_j)$的差别很大，可以预料当 j 愈大时，差别也愈大.

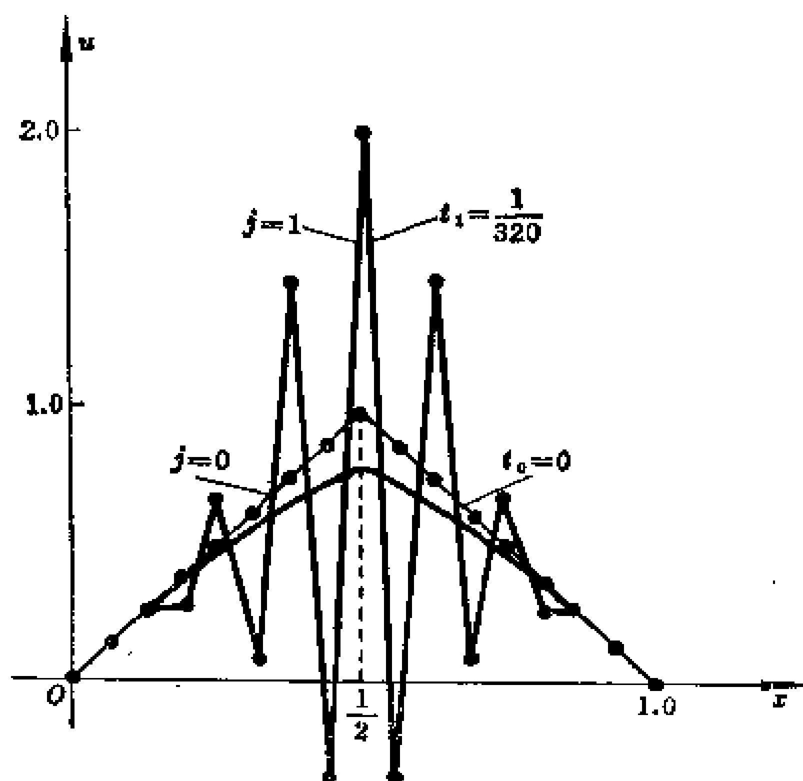


图 7-7
$h=\frac{1}{16}$, $\tau=\frac{1}{320}$

以下在同样网格画分下，比较显式、隐式差分格式的数值计算结果. 如取$\lambda=\frac{\tau}{h^2}=0.6\left(>\frac{1}{2}\right)$, $h=\frac{1}{8}$, $\tau=\frac{3}{320}$, 用显式差分格式

(7.1.58)方法计算，并把结果画出图来，如图 7-8(a)所示；如用隐式差分格式

$$
\begin{cases}
U_{k,j+1}=U_{k,j}+\lambda(U_{k+1,j+1}-2U_{k,j+1}+U_{k-1,j+1}), \\
\qquad \begin{pmatrix} k=1,2,\cdots,N-1 \\ j=0,1,\cdots,m_0-1 \end{pmatrix} \\
U_{k,0}=\varphi(kh), \quad k=0,1,2,\cdots,N \\
U_{0,j}=U_{N,j}=0, \quad j=0,1,2,\cdots,m_0
\end{cases}
\tag{7.1.60}
$$

方法计算，并把结果画出图来，如图 7-8(b)所示。

如取$\lambda=\frac{\tau}{h^2}=0.6\left(>\frac{1}{2}\right)$, $h=\frac{1}{16}$, $\tau=\frac{3}{1280}$，用显式差分格式(7.1.58)方法计算，并把结果画出图来，如图 7-9(a)所示；如用隐式差分格式(7.1.60)方法计算，并把结果画出图来，如图 7-9(b)所示。

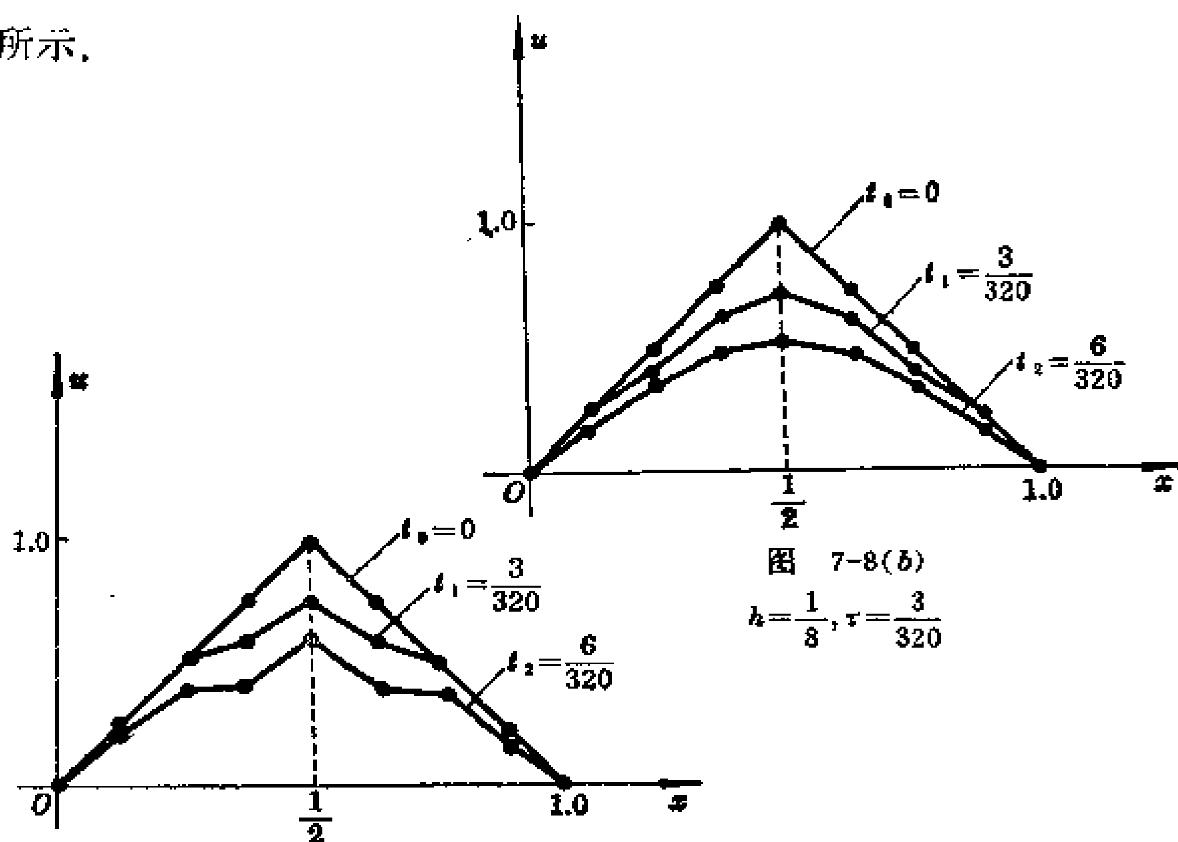


图 7-8(b) $h=\frac{1}{8}$, $\tau=\frac{3}{320}$

图 7-8(a) $h=\frac{1}{8}$, $\tau=\frac{3}{320}$

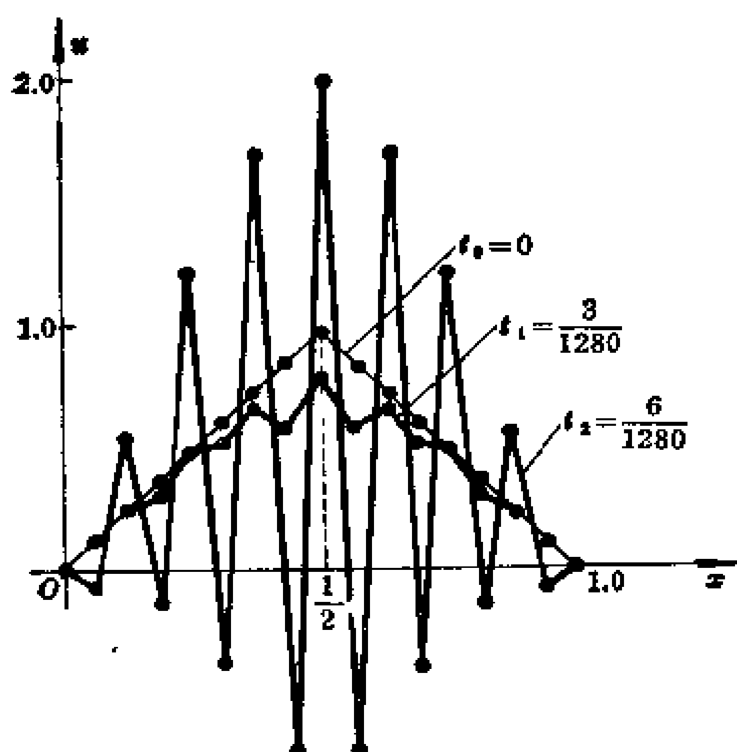


图 7-9(a)

$h=\frac{1}{16}, \tau=\frac{3}{1280}$

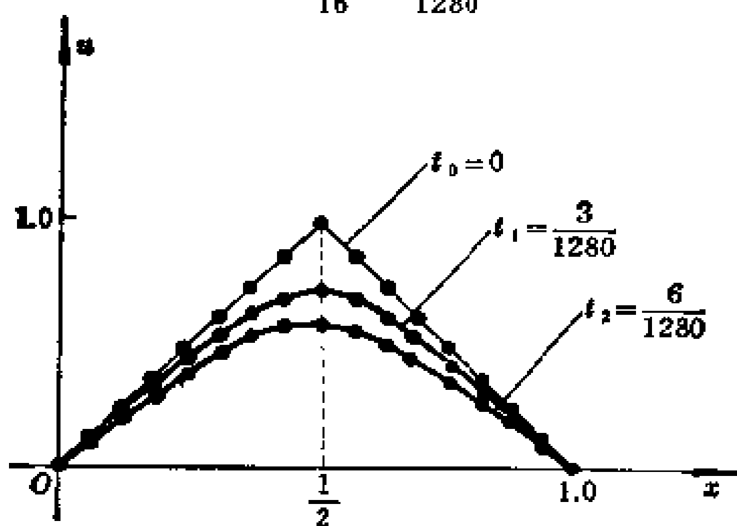


图 7-9(b)

$h=\frac{1}{16}, \tau=\frac{3}{1280}$

从图 7-8, 7-9 可以看出，用同样的 $\lambda=a^2\frac{\tau}{h^2}=0.6$ 值作数值计算，取同样的h和 τ 值时，用显式差分格式(7.1.58)计算出的$j=1$,

2 的各排结点值 $U_{k,j}$ 和 $u(x_k, t_j)$ 的差别很大，故不宜采取这种方案作数值计算；如用隐式差分格式(7.1.60)计算出 $j=1,2$ 的各排结点值 $U_{k,j}$ 和 $u(x_k, t_j)$，它们符合很好，可以采取这种方案作数值计算.

通过这个例子中的图 7-8 和图 7-9 表明，用显式差分格式作数值计算时，必须有 $\lambda\leqslant\frac{1}{2}$，若用隐式差分格式作数值计算时，$\lambda$ 值不受任何限制.

2 差分方程解的收敛性

在 1 中我们讨论了数值求解混合问题(7.1.1)的三种差分格式，并且介绍了这些格式的稳定性条件. 现在要问：用这种稳定的差分格式算得的解，当 $\tau\to0, h\to0$ 时，是否收敛于原混合问题(7.1.1)的真解？这就是差分格式的收敛性问题. 这也是一个重要问题，因为用不收敛的差分格式进行计算，不可能得到真解的近似值.

我们以热传导方程混合边值问题的显式差分格式(7.1.8)为例，讨论差分格式的收敛性. 设 $u_{k,j}, U_{k,j}$ 分别表示原混合问题(7.1.1)和差分方程(7.1.7)在点 $(kh, j\tau)$ 的真解值，而 $e_{k,j}$ 为它们之间的偏差：

$$e_{k,j}=u_{k,j}-U_{k,j} \tag{7.1.61}$$

所谓收敛性问题，就是要求当步长 $\tau\to0, h\to0$ 时，$e_{k,j}\to0$.

收敛性定理 设混合问题(7.1.1)的解 $u(x, t)$ 在区域 $R(0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T)$ 中存在、连续，且具有有界的偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$，则当

$$\lambda=a^2\frac{\tau}{h^2}\leqslant\frac{1}{2} \tag{7.1.62}$$

时，差分方程(7.1.7)的真解 U 收敛于原混合问题的真解 u.

证明 由于(7.1.5)—(7.1.7)式容易推出 $e_{k,j}$ 满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{e_{k,j+1}-e_{k,j}}{\tau}-a^2\dfrac{e_{k+1,j}-2e_{k,j}+e_{k-1,j}}{h^2}=\bar{f}_{k,j}, \\ \qquad\qquad \begin{pmatrix} k=1,2,\cdots,N-1 \\ j=0,1,\cdots,m_0-1 \end{pmatrix} \\ e_{k,0}=0, \quad (k=0,1,2,\cdots,N) \\ e_{0,j}=e_{N,j}=0, \quad (j=0,1,2,\cdots,m_0) \end{cases} \tag{7.1.63}$$

其中

$$\bar{f}_{k,j}=\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_k,\bar{t})}{\partial t^2}-a^2\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u(\bar{x},t_j)}{\partial x^4},$$

$$(t_j\leqslant\bar{t}\leqslant t_{j+1},\ |\bar{x}-x_k|<h)$$

引入常数

$$K_1=\frac{1}{2}\max_R\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right|,\quad K_2=\frac{a^2}{12}\max_R\left|\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}\right|$$

并记 $F=K_1\tau+K_2h^2$，容易看到对 R 中所有结点 $(x_k,t_j)=(kh,j\tau)$，都有 $|\bar{f}_{k,j}|\leqslant F$.

将(7.1.63)中第一式改写成

$$e_{k,j+1}=\lambda e_{k+1,j}+(1-2\lambda)e_{k,j}+\lambda e_{k-1,j}+\tau\bar{f}_{k,j},$$

$$(k=1,2,\cdots,N-1) \tag{7.1.64}$$

于是

$$|e_{k,j+1}|\leqslant|\lambda e_{k+1,j}|+|(1-2\lambda)e_{k,j}|+|\lambda e_{k-1,j}|+\tau|\bar{f}_{k,j}|,$$

$$(k=1,2,\cdots,N-1) \tag{7.1.65}$$

记第 j 排上 $e_{k,j}$ 的最大值为 $e_j=\max|e_{k,j}|$ $(k=0,1,2,\cdots,N)$，利用 $0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ 和 $|\bar{f}_{k,j}|\leqslant F$，(7.1.65)式就得到

$$|e_{k,j+1}|\leqslant\lambda e_j+(1-2\lambda)e_j+\lambda e_j+F\tau=e_j+F\tau,$$

$$(k=1, 2, \cdots, N-1) \qquad (7.1.66)$$

再注意到 $\varepsilon_{0,j+1}=\varepsilon_{N,j+1}=0$，即得到

$$\varepsilon_{j+1} \leqslant \varepsilon_j + F\tau \qquad (7.1.67)$$

由此逐步递推得到

$$\varepsilon_{j+1} \leqslant \varepsilon_j + F\tau \leqslant \varepsilon_{j-1} + 2F\tau \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon_0 + (j+1)F\tau$$

由(7.1.63)的初始条件知道 $\varepsilon_0=0$，又对于区域 R 中的结点，总有 $(j+1)\tau<T$，就得出

$$\varepsilon_{j+1} \leqslant FT \qquad (7.1.68)$$

再由 $F=K_1\tau+K_2h^2$，并注意到(7.1.62)式，就有

$$\varepsilon_{j+1} \leqslant (K_1\tau+K_2h^2)T \qquad (7.1.69)$$

这就证明了当步长 $\tau\to0$，$h\to0$ 时，各排偏差的最大值均趋于零，由此立即得到差分方程(7.1.7)的真解收敛于原混合问题(7.1.1)的真解 u 的结论.

关于热传导方程混合边值问题的隐式差分格式(7.1.33)的收敛性，有兴趣的读者可参考有关书籍①．热传导方程混合边值问题的六点差分格式(7.1.52)的收敛性，有兴趣的读者亦可参考有关书籍②.

§7-2 波动方程的差分解法

一维波动方程的混合边值问题(7.1.2)用分离变量法已得到过它的精确解的表达式，此时的求解区域必须具有简单的形状，而且微分方程及定解条件通常必须是线性的，常系数的．然而实际中所碰到的问题却往往要复杂得多，应用这些方法就困难得多，甚至是不可能应用的．这时，就不必求得问题的精确解，而只要求得

① 武汉大学、山东大学计算数学教研室，《计算方法》，第七章，§2，人民教育出版社，1979 年.

② 北京大学、吉林大学、南京大学计算数学教研室，《计算方法》，第八章，§3，人民教育出版社，1961 年.

到具有一定精确度的近似解. § 7-1 中我们已经看到差分方法就是一种近似求解的常用方法. 为了说明方法起见, 下面我们用差分方法来求解(7.1.2), 这些基本思想和方法可以用到更复杂的情况. (7.1.2)的差分方法求解与 § 7-1 中的作法十分类似.

为了保证解的连续性, 所给的初始条件及边界条件要求满足条件 $\varphi(0)=\mu_1(0), \varphi(l)=\mu_2(0), \psi(0)=\mu_1'(0), \psi(l)=\mu_2'(0)$.

1　显式差分格式的构造

我们用直线族 $x=x_k=kh\left(k=0,1,2,\cdots,N,\ h=\dfrac{l}{N}\right)$, $t_j=j\tau$ $\left(j=0,1,2,\cdots,m_0,\ m_0=\left[\dfrac{T}{\tau}\right]\right)$将区域 $G\{0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 划分成网格, 其中 $h>0$, $\tau>0$ 是网格在 x 方向和 t 方向的步长. 对于混合边值问题(7.1.2), 我们就象处理热传导问题一样去取网格. 记 $(k,j)=(x_k,t_j)=(kh,j\tau)$, 称此为**网格节点**, $u_{k,j}=u(x_k,t_j)$.

微分方程的差分近似

和第六章泊松方程一样, 我们分别用

$$\frac{u_{k-1,j}-2u_{k,j}+u_{k+1,j}}{h^2},\quad \frac{u_{k,j-1}-2u_{k,j}+u_{k,j-1}}{\tau^2} \tag{7.2.1}$$

去近似代替$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, 在$(x_k,t_j)$上(7.1.2)式就可以改写成差分形式:

$$(Lu)_{k,j}=\frac{u_{k,j-1}-2u_{k,j}+u_{k,j+1}}{\tau^2}$$

$$-a^2\frac{u_{k-1,j}-2u_{k,j}+u_{k+1,j}}{h^2}=f_{k,j}+R_{k,j} \tag{7.2.2}$$

其中

$$|R_{k,j}|\leqslant\frac{1}{12}\{\tau^2+a^2h^2\}M_4,\quad \lambda=a\frac{\tau}{h} \tag{7.2.3}$$

M_4是$u(x,t)$的各个四阶偏导数的绝对值在G上的公共上界，$R_{k,j}=O(h^2+\tau^2)$。略去(7.2.2)式中的有关截断误差项$R_{k,j}$，便得出和(7.1.2)式近似的差分方程:

$$R^hU_{k,j}=\frac{U_{k,j-1}-2U_{k,j}+U_{k,j+1}}{\tau^2}$$

$$-a^2\frac{U_{k-1,j}-2U_{k,j}+U_{k+1,j}}{h^2}=f_{k,j} \qquad (7.2.4)$$

$$(k=1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots)$$

初始条件和边界条件的差分近似

关于波动方程的初始条件中$u|_{t=0}=\varphi(x)$与§7-1中的热传导方程一样，得到

$$U_{k,0}=\varphi(kh)=\varphi_k(k=0,1,\cdots,N-1) \qquad (7.2.5)$$

对于后一条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$$

我们介绍用两种方法去差分近似.

第一种差分方法　用$\frac{u_{k,1}-u_{k,0}}{\tau}$代替$\frac{\partial u}{\partial t}(x_k,0)$，得到

$$\frac{u_{k,1}-u_{k,0}}{\tau}=\psi_k+\gamma_k \qquad (7.2.6)$$

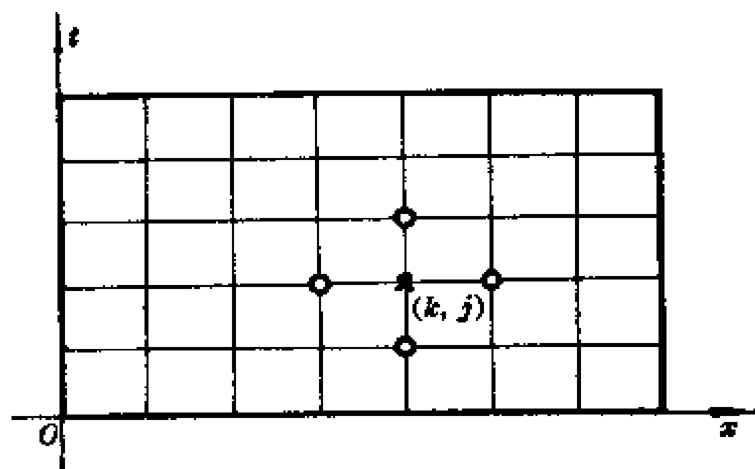


图　7-10

按泰勒公式把 $u_{k,1}$ 在 $(x_k,0)$ 展开，就知道

$$|\gamma_k|\leqslant\frac{\tau}{2}M_2=\frac{1}{2}(\lambda h/a)M_2 \tag{7.2.7}$$

M_2 是 $u(x,t)$ 的二阶偏导数的绝对值在 G 上的公共上界．于是

$$u_{k,1}=\varphi_k+\tau\psi_k+\gamma_{k,1} \tag{7.2.8}$$

其中

$$|\gamma_{k,1}|=|\tau\gamma_k|\leqslant\frac{1}{2}(\lambda^2h^2/a^2)M_2 \tag{7.2.9}$$

略去(7.2.8)中的 $\gamma_{k,1}$，就得到后一初始条件的差分近似

$$U_{k,1}=\varphi_k+\tau\psi_k\left(\text{或}\frac{U_{k,1}-\varphi_k}{\tau}=\psi_k\right) \tag{7.2.10}$$

这里(7.2.10)与 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$ 之差只是 $O(h)$．

第二种差分方法　由于

$$\frac{u(x_k,\tau)-u(x_k,-\tau)}{2\tau}=\frac{\partial u}{\partial t}(x_k,0)+O(\tau^2)$$

所以 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$ 代以

$$\frac{u_{k,1}-u_{k,-1}}{2\tau}=\psi_k+\gamma_k^* \tag{7.2.11}$$

其中

$$|\gamma_k^*|\leqslant\frac{\tau^2}{6}M_3=\frac{\lambda^2h^2}{6a^2}M_3 \tag{7.2.12}$$

M_3 是 $u(x,t)$ 的二阶偏导数的绝对值在 G 上的公共上界．于是可用

$$\frac{U_{k,1}-U_{k,-1}}{2\tau}=\psi_k \tag{7.2.13}$$

作为 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$ 的差分近似．

但是由(7.2.13)不能确定 $U_{k,1}$，因为它又引进了新的未知数

$U_{k,-1}$. 为了确定 $U_{k,-1}$，我们把(7.2.13)和在$(x_k, 0)$上列出的差分方程

$$U_{k,1}+U_{k,1}-\lambda^2(U_{k+1,0}+U_{k-1,0})$$
$$-2(1-\lambda^2)U_{k,0}-\frac{\lambda^2h^2}{a^2}f_{k,0}=0$$

联立起来，消去其中的 $U_{k,-1}$，得到$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$的第二差分近似

$$U_{k,1}=\frac{1}{2}\left\{2\tau\psi_k+\lambda^2(\varphi_{k+1}-2\varphi_k+\varphi_{k-1})+2\varphi_k+\frac{\lambda^2h^2}{a^2}f_{k,0}\right\} \tag{7.2.14}$$

为了定出这个近似初始条件的截断误差，我们把原微分方程混合边值问题的解 $u(x, t)$ 代入在 $t=0$ 的结点上列出的差分方程 $R^hU_{k,0}=f_{k,0}$ 中，便有

$$R^hu_{k,0}=f_{k,0}+R_{k,0},\qquad |R_{k,0}|\leqslant\frac{1}{12}\{\tau^2+a^2h^2\}M_4 \tag{7.2.15}$$

由于(7.2.11)与(7.2.15)，仿照由(7.2.13)与 $R^hU_{k,0}=f_{k,0}$得出(7.2.14)的办法，立即得到

$$u_{k,1}=\frac{1}{2}\left\{2\tau\psi_k+\lambda^2(\varphi_{k+1}-2\varphi_k+\varphi_{k-1})+2\varphi_k-\frac{\lambda^2h^2}{a^2}f_{k,0}\right\}$$
$$+\gamma^*_{k,1}=U_{k,1}+\gamma^*_{k,1} \tag{7.2.16}$$

其中

$$|\gamma^*_{k,1}|=\left|\tau\gamma^*_k+\left(\frac{1}{2}\lambda^2h^2/a^2\right)R_{k,0}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{\lambda^3h^3}{3a^3}M_3+\frac{\lambda^2h^2}{12a^2}(\tau^2+a^2h^2)M_4\right\}$$

略去(7.2.16)中的 $\gamma^*_{k,1}$，就得到后一初始条件的第二种差分近似

$$U_{k,1}=\frac{1}{2}\left\{2\tau\psi_k+\lambda^2(\varphi_{k+1}-2\varphi_k+\varphi_{k-1})+2\varphi_k+\frac{\lambda^2h^2}{a^2}f_{k,0}\right\} \tag{7.2.17}$$

关于波动方程的边界条件 $u(0, t)=\mu_1(t)$, $u(l, t)=\mu_2(t)$可

以转化为

$$U_{0,j}=\mu_1(j\tau),U_{N,j}=\mu_2(j\tau),\ j=0,1,2,\cdots \qquad (7.2.18)$$

第一种差分格式（显式差分格式） 差分方程(7.2.4)、(7.2.5)、(7.2.10)、(7.2.18)可写成为

$$\begin{cases} U_{k,j+1}=\lambda^2U_{k+1,j}+2(1-\lambda^2)U_{k,j}+\lambda^2U_{k-1,j}-U_{k,j-1}+\tau^2f_{k,j} \\ \qquad\qquad (k=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots,m_0-1) \\ U_{k,0}=\varphi_k \\ \qquad\qquad (k=0,1,2,\cdots,N) \\ U_{k,1}=\varphi_k+\tau\psi_k \\ U_{0,j}=\mu_1(j\tau),U_{N,j}=\mu_2(j\tau), \quad (j=0,1,2,\cdots,m_0) \end{cases} \qquad (7.2.19)$$

(7.2.19)就是(7.1.2)的**第一种差分格式**．同样的有

第二种差分格式（显式差分格式） 差分方程(7.2.4)、(7.2.5)、(7.2.17)、(7.2.18)可写成为

$$\begin{cases} U_{k,j+1}=\lambda^2U_{k+1,j}+2(1-\lambda^2)U_{k,j}+\lambda^2U_{k-1,j}-U_{k,j-1}+\tau^2f_{k,j} \\ \qquad\qquad (k=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,3,\cdots,m_0-1) \\ U_{k,0}=\varphi_k \\ \qquad\qquad (k=1,2,\cdots,N-1) \\ U_{k,1}=\dfrac{1}{2}\left\{2\tau\psi_k+\lambda^2(\varphi_{k+1}-2\varphi_k+\varphi_{k-1})+2\varphi_k+\dfrac{\lambda^2h^2}{a^2}f_{k,0}\right\} \\ U_{0,j}=\mu_1(j\tau),U_{N,j}=\mu_2(j\tau), \quad (j=0,1,2,\cdots,m_0) \end{cases} \qquad (7.2.20)$$

(7.2.20)就是(7.1.2)的**第二种差分格式**．

从(7.2.19)、(7.2.20)式，都可由第0排，第1排上的解值去决定第2排上的解值；再由第1排，第2排的解值去决定第3排上的解值；…；依此类推，就可在t增加的方向逐排决定出一切解值。

用泰勒展开式的方法可以说明，当$u(x,t)$在$G\{0\leqslant x\leqslant l,0\leqslant t\leqslant T\}$上具有直到四阶的连续有界偏导数时，第二种方法得到的初

始条件的差分近似(7.2.17)要比第一种方法得到的差分近似(7.2.10)要精确些. 在应用时应该注意,第二种方法用到了 G 以外的点,则要求微分方程在初始线 $t=0$ 上也成立.

(7.2.19)、(7.2.20)两种格式的计算步骤如下:

1　给出 a, l, h, λ, 以及 t 方向的层数 T_0.

2　求 x 方向的等分数 N, 以及 t 方向的步长 τ

$$N=\frac{l}{h},\quad \tau=\frac{\lambda h}{a}$$

3　计算结点的坐标 $x_k=kh$, $t_j=j\tau$.

4　计算初值与边值

$$U_{0,j}=\mu_1(t_j),U_{N,j}=\mu_2(t_j),U_{k,0}=\varphi(x_k)$$

$$U_{k,1}=\varphi(x_k)+\tau\psi(x_k),$$

$$U_{k,1}=\frac{1}{2}\left\{2\tau\psi_k+\lambda^2(\varphi_{k+1}-2\varphi_k+\varphi_{k-1})+2\varphi_k+\frac{\lambda^2h^2}{a^2}f_{k,0}\right\}$$

5　利用(7.2.19), (7.2.20)计算$U_{k,j+1}$.

计算框图如第 234 页和第 235 页所示. 第 234 页上框图是第一种差分格式,第 235 页上框图是第二种差分格式.

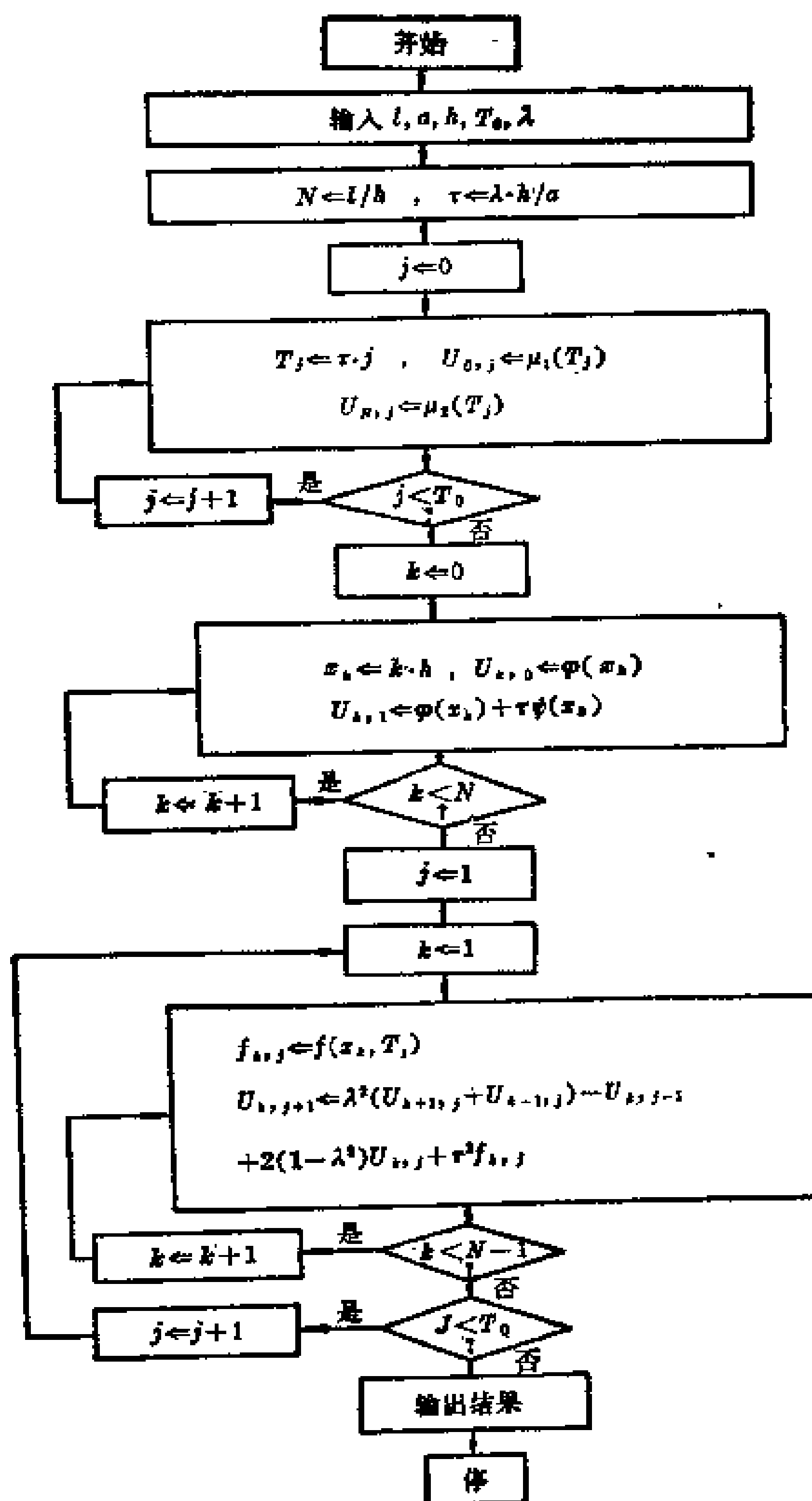
例　用第一种差分格式数值求解一维波动方程的混合问题

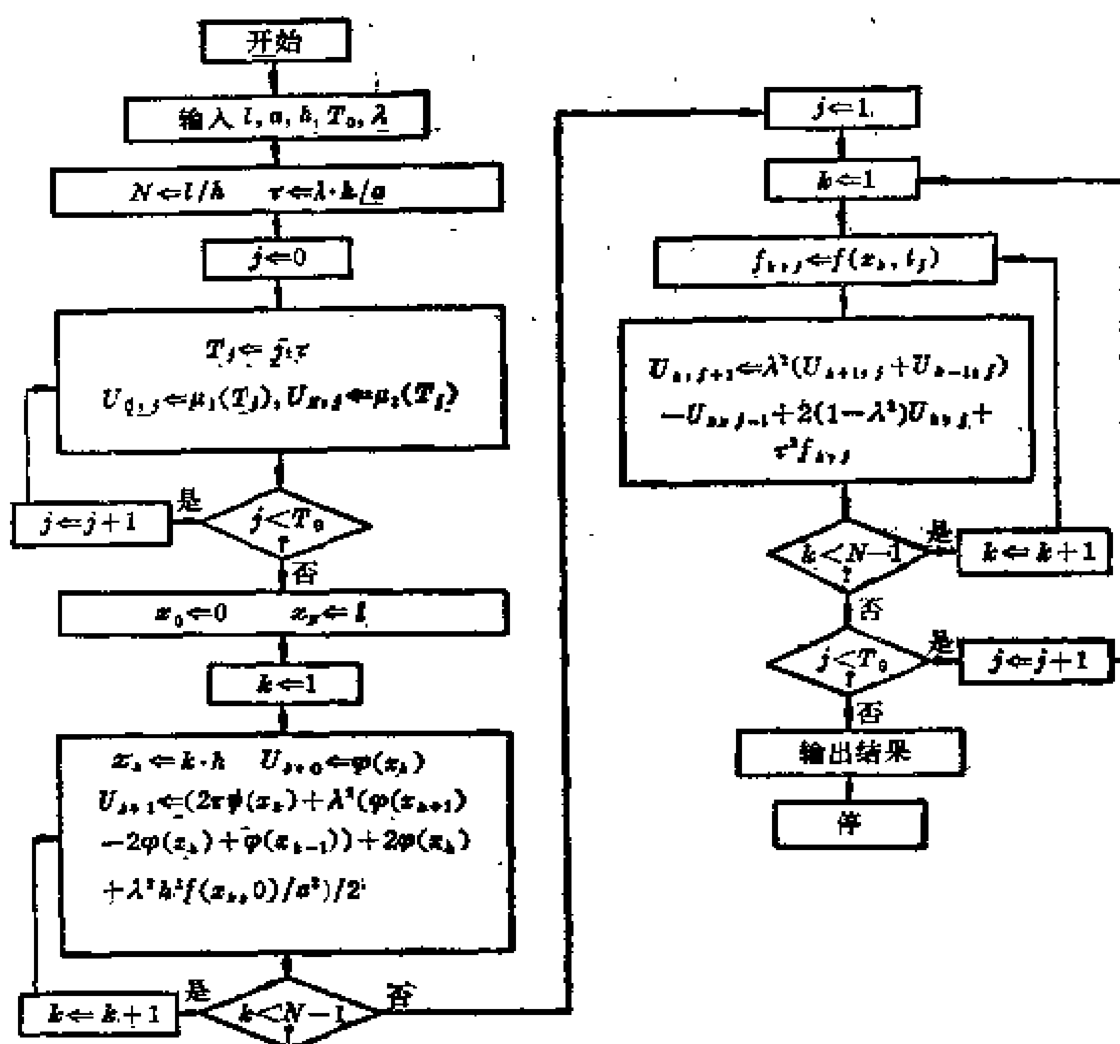
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<1,0<t\\ u(x,0)=\sin\pi x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=x(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & 0\leqslant t\end{cases}$$

(1) 取 $\lambda=1$, $h=0.2$, 要求算出 $j=1, 2, 3$ 层的近似值. (2)取 $\lambda=1, h=0.05$, 要求算出 $j=1, 2, 3, \cdots, 20$ 层的近似值.

解　(1) 当 $\lambda=1, h=0.2$, 又 $a=1$, 所以 $\tau=0.2$.

混合问题的第一种差分格式


开始
输入 l, a, h, T_0, λ
$N \Leftarrow l/h$, $\tau \Leftarrow \lambda \cdot h/a$
$j \Leftarrow 0$
$T_j \Leftarrow \tau \cdot j$, $U_{0,j} \Leftarrow \mu_1(T_j)$
$U_{N,j} \Leftarrow \mu_2(T_j)$
$j \Leftarrow j+1$
是
$j < T_0$
否
$k \Leftarrow 0$
$x_k \Leftarrow k \cdot h$, $U_{k,0} \Leftarrow \varphi(x_k)$
$U_{k,1} \Leftarrow \varphi(x_k) + \tau\psi(x_k)$
$k \Leftarrow k+1$
是
$k < N$
否
$j \Leftarrow 1$
$k \Leftarrow 1$
$f_{k,j} \Leftarrow f(x_k, T_j)$
$U_{k,j+1} \Leftarrow \lambda^2(U_{k+1,j} + U_{k-1,j}) - U_{k,j-1}$
$+2(1-\lambda^2)U_{k,j} + \tau^2 f_{k,j}$
$k \Leftarrow k+1$
是
$k < N-1$
否
$j \Leftarrow j+1$
是
$J < T_0$
否
输出结果
停



$$\begin{cases} U_{k,j+1}=\lambda^2 U_{k+1,j}+2(1-\lambda^2)U_{k,j}+\lambda^2 U_{k-1,j}-U_{k,j-1} \\ \qquad\qquad (k=1,2,3,4) \quad (j=1,2) \\ U_{k,0}=\sin k\pi h,\ U_{k,1}=\sin k\pi h+kh\tau(1-kh) \\ U_{0,j}=0,\ U_{6,j}=0, \quad (j=1,2,3) \end{cases}$$

利用上述差分格式依次计算出第 0 排、1 排、2 排、3 排上的 $U_{k,j}$ 值：由 $U_{k,0}=\sin\frac{k}{5}\pi$ 得出

"0"　$U_{0,0}=0$,　$U_{1,0}=\sin\frac{\pi}{5}=0.5877852$,

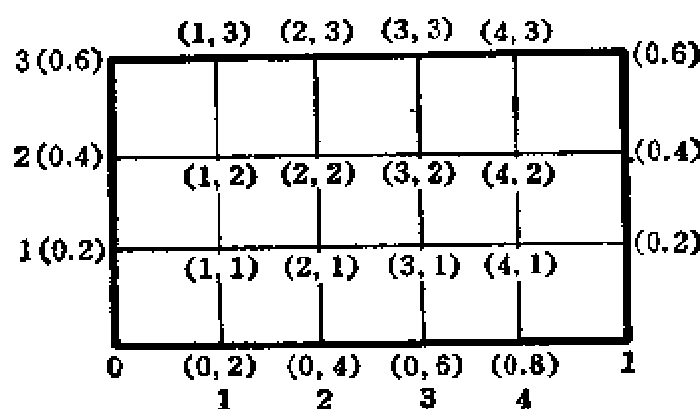


图 7-11

$U_{2,0}=\sin\frac{2\pi}{5}=0.9510565,\qquad U_{3,0}=\sin\frac{3\pi}{5}=0.9510565,$

$U_{4,0}=\sin\frac{4\pi}{5}=0.5877852,\qquad U_{5,0}=0.$

利用 $U_{k,1}=\sin\frac{k\pi}{5}+0.04k\cdot(1-0.2k)$ 得出

"1" $U_{1,1}=\sin\frac{\pi}{5}+0.04\cdot(1-0.2)=0.6197852,$

$U_{2,1}=\sin\frac{2\pi}{5}+0.08\cdot(1-0.4)=0.9990565,$

$U_{3,1}=\sin\frac{3\pi}{5}+0.12\cdot(1-0.6)=0.9990565,$

$U_{4,1}=\sin\frac{4\pi}{5}+0.16\cdot(1-0.8)=0.6197852,$

$U_{0,1}=U_{5,1}=0.$

利用 $U_{k,j+1}=U_{k+1,j}+U_{k-1,j}-U_{k,j-1}$ 得出

"2" $U_{1,2}=U_{2,1}+U_{0,1}-U_{1,0}=0.9990565+0-\sin\frac{\pi}{5}=0.4112712$

$=U_{4,2}$

$U_{2,2}=U_{3,1}+U_{1,1}-U_{2,0}=0.9990565+0.6197852-\sin\frac{2\pi}{5}$

$$=0.6677852=U_{3,2}$$

$$U_{0,2}=U_{5,2}=0;$$

列出 $U_{k,j}$ 表

j \ k	2	4	6	8	5
	18	16	14	12	
0	0.3135170	0.5957852	0.8195170	0.9630565	1.012499
1	0.3101580	0.5890620	0.8098463	0.9513883	1.000126
2	0.2988772	0.5677219	0.7802450	0.9163786	0.9632363
3	0.2800450	0.5322190	0.7314330	0.8589164	0.9027767
4	0.2542049	0.4833374	0.6645836	0.7804252	0.8202572
5	0.2220610	0.4224163	0.5812892	0.6828217	0.7177060
6	0.1844601	0.3510666	0.4835172	0.5684622	0.5976142
7	0.1423713	0.2711312	0.3738047	0.4400790	0.4628667
8	0.0968616	0.1846400	0.2549452	0.3007060	0.3166672
9	0.0490701	0.0937597	0.1299209	0.1538497	0.1624517
10	0.0001798	0.0007403	0.0018289	0.0031502	0.0037982
11	−0.0486116	−0.0921400	−0.1261952	−0.1477062	−0.1551672
12	−0.0961213	−0.1826310	−0.2510547	−0.2950790	−0.3103667
13	−0.1412100	−0.2685665	−0.3697673	−0.4352122	−0.4578642
14	−0.1828110	−0.3479163	−0.4795391	−0.5645717	−0.5939560
15	−0.2199549	−0.4188374	−0.5775836	−0.6799253	−0.7152572
16	−0.2517950	−0.4797190	−0.6614333	−0.7784164	−0.8187767
17	−0.2776272	−0.5289719	−0.7280954	−0.8576286	−0.9019863
18	−0.2969079	−0.5653120	−0.7785963	−0.9156383	−0.9628766
19	−0.3090169	−0.5877852	−0.8090169	−0.9510565	−0.9999999
20	−0.3135168	−0.5957850	−0.8195163	−0.9630561	−1.012491

"3" $U_{1,3}=U_{2,2}+U_{0,2}-U_{1,1}=0.6677852-0.6197852=0.0480000$

$=U_{4,3}$

$U_{2,3}=U_{3,2}+U_{1,2}-U_{2,1}=0.6677852+0.4112712-0.9990565$

$=0.0799999=U_{3,3}$

$U_{0,3}=U_{5,3}=0.$

(2) 当 $\lambda=1, h=0.05$, 又 $a=1$, 所以 $\tau=0.05$. 引用算法语言编写成程序, 采用电子计算机计算出 $U_{k,j}$ 的数值结果（阅第 237 页）.

2 差分方程解的收敛性及其稳定性

差分方程解的收敛性

同热传导的讨论一样, 用差分方程的解 $U_{k,j}$ 近似原微分方程的解 $u_{k,j}$, 是要求当步长 h, τ 按一定方式趋于零时, 对于所考虑的区域 $G\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$ 上所有的点 (x_k, t_j), 都成立

$$|U_{k,j}-u_{k,j}|\longrightarrow 0 \tag{7.2.21}$$

差分方程满足上述条件(7.2.21), 就称它满足收敛性要求. 如果收敛性要求不满足, 求解差分方程就失去了意义, 因此, 实际上有用的是满足收敛性要求的差分格式.

用差分方程去替代微分方程混合边值问题, 从表面上看其截断误差都是很小的量(当步长 $h\to 0, \tau\to 0$ 时, 而趋于 0), 似乎收敛性不成问题, 但事实上并非如此. 对于差分方程(7.2.19), (7.2.20)来说, 我们可以证明下述事实:

不论步长 h, τ 取得如何小, 只要步长比满足条件 $\lambda=\frac{a\tau}{h}>1$ (λ 是常数), 那末差分方程(7.2.19)、(7.2.20)的解 $U_{k,j}$ 不收敛于相应的波动方程混合边值问题(7.1.2)的解 $u_{k,j}$.

以下给出这个事实的证明. 为方便起见, 设 $f(x,t)\equiv 0$. 过 x 轴上区间 $[0, l]$ 的两个端点 $x=0$ 与 $x=l$ 分别作斜率为 $1/a$ 与 $-1/a$ 的二条直线(特征线, 如图 7-12 中虚线所示). 设其交点为 P, 它们和 x 轴所围成的三角形

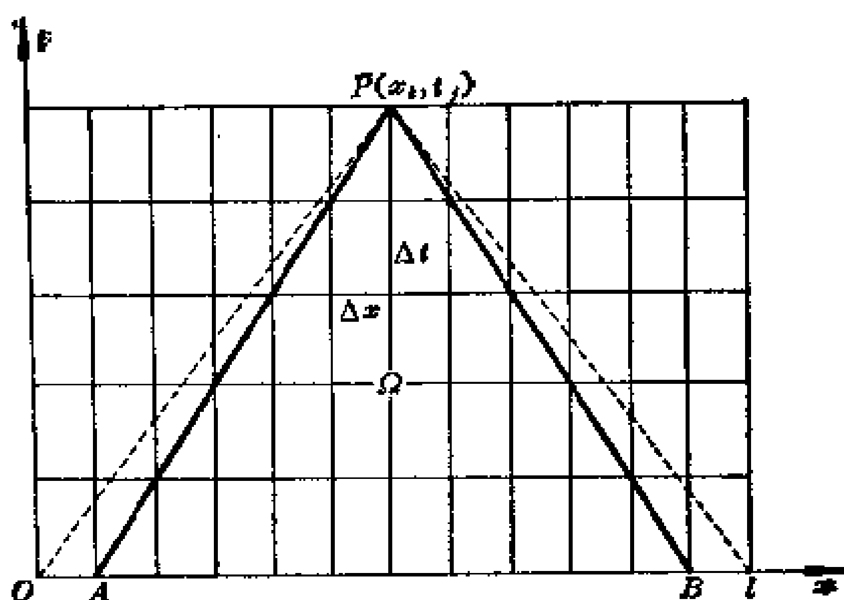


图 7-12

区域为 Ω. 从 § 4-1 可知, Ω 就是 x 轴上区间 $[0, l]$ 的决定区域; (7.1.2) 中波动方程的解可完全由初始条件所决定, 而 P 点的依赖区间就是 $[0, l]$.

为证明简单起见, 假设 P 点就是一个结点 (x_k, t_j), 并考虑差分方程的解 $U_{k,j}$ 在此点收敛. 由 (7.2.4) 或差分格式 (7.2.19)、(7.2.20) 可知在 P 点差分方程的解 $U_{k,j}$ 依赖于下一排的三个结点 (x_{k-1}, t_{j-1}), (x_k, t_{j-1}), (x_{k+1}, t_{j-1}) 上的解值 $U_{k-1,j-1}, U_{k,j-1}, U_{k+1,j-1}$ 以及再下排上结点 (x_k, t_{j-2}) 的解值 $U_{k,j-2}$. 如此将这种依赖关系继续递推下去, 直到最下面二排为止. 容易看到, 如果 P 点向下引二条网格对角线 (如图 7-12 中实线所示), 那末 P 点差分方程 (7.2.4) 的解 $U_{k,j}$ 只依赖于此对角线和第 0 层、第一层所截区间的初始值. 这表明差分方程在 P 点的解值只依赖于在 x 轴上为网格对角线所交截的区间 AB 上的初始条件. 仿照以前的称呼, 区间 AB 称为差分方程 (7.2.4) 在 P 点的**依赖区间**.

过 P 点这两条网格对角线的斜率分别为 $\pm\frac{\tau}{h}$, 而过 P 点二条特征线 (虚线) 的斜率分别为 $\pm 1/a$, 由假设 $\lambda = a\frac{\tau}{h} > 1$, 即 $\frac{\tau}{h} > \frac{1}{a}$, 可知差分方程的依赖区间 AB 一定落在微分方程的依赖区间 $[0, l]$ 内部. 于是若保持 AB 上的初始条件 φ 和 ψ 不变, 而改变位于 $[0, l]$ 内部与 AB 外部的 φ 和 ψ 的值, 那末微分方程的解在 P 点的值 $u(x_k, t_j)$ 就发生了变化, 而差分方程在 P 点的解值

$U_{k,j}$ 仍保持不变，并不相应地发生变化．这就证明了差分格式(7.2.19)、(7.2.20)的解 $U_{k,j}$ 决不会收敛于原混合问题的解．证毕．

从刚才证明可知，$\lambda\leqslant1$ 是差分格式(7.2.19)、(7.2.20)收敛的必要条件．

从这个叙述的结果可以看出，对于波动方程来说，为了保证差分方程解的收敛性，要求步长比 $a\frac{\tau}{h}$ 满足一定的条件．这个条件是：

在初始条件及边值条件满足一定的光滑性要求下，只要步长比满足条件

$$\lambda=a\frac{\tau}{h}\leqslant1 \qquad (7.2.22)$$

那末，差分方程(7.2.19)，(7.2.20)的解 $U_{k,j}$ 必收敛于波动方程混合边值问题(7.1.2)的解 $u_{k,j}$．

又从(7.2.22)看出，为了保证收敛性，在步长趋于0时，τ 与 h 的比值始终要满足(7.2.22)，当缩小步长时，τ 与 h 必须同时缩小才行．

差分方程的稳定性

用差分方法求解问题时，除了考虑其解的收敛性外，还必须考虑计算过程中舍入误差的影响，这就是所谓差分方程的稳定性概念．

差分方程求解的每一步计算过程中都有舍入误差，而且每一步的舍入误差对以后的计算结果还会发生影响．这样，我们实际计算得到的并非差分问题的精确解 $U_{k,j}$，而是它的近似解 $\bar{U}_{k,j}$．因此，尽管每一步的舍入误差其值甚微，但得到的差分问题的近似解 $\bar{U}_{k,j}$ 对于精确解 $U_{k,j}$ 的偏差并不能保证一定可以控制，相反，这种误差的积累却可能对解发生极大的影响，甚至使计算过程无法进行下去．如果出现这种情况，就称所考虑的差分方程是**不稳定的**．而当差分方程的解由于舍入误差的影响所产生的偏差可以得

到控制，就称所考虑的差分方程是**稳定的**. 显然，今后对我们实际有用的只是那种稳定性的差分格式.

一般说来，我们可以证明：当步长比$\lambda=a\frac{\tau}{h}>1$时，差分方程(7.2.19)，(7.2.20)是不稳定的. 此时就不能用于实际计算. 同时，还可以证明：当步长比 $\lambda=a\frac{\tau}{h}\leqslant 1$时，所考虑的差分方程（7.2.19)(7.2.20)不仅是收敛的，而且是稳定的. 这种情况可以用于实际计算中去. 关于这些事实的深入讨论，有兴趣的读者可参考有关书籍①.

第七章 习 题

1 利用显式差分格式数值求解热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ 0<x<1,\ 0<t\\ u(x,0)=x(1-x),\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\ 0\leqslant t\end{cases}$$

取 $\lambda=\frac{1}{6}$, $h=0.1$, 要求计算出 $j=1, 2, \cdots, 9$ 共九层数值解.

2 利用隐式差分格式数值求解热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ 0<x<1,\ 0<t\\ u(x,0)=x(1-x),\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\ 0\leqslant t\end{cases}$$

取 $\lambda=\frac{1}{6}$, $h=0.1$, 要求计算出 $j=1, 2, \cdots, 9$ 共九层的数值解.

3 对热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ 0<x<1,\ 0<t\\ u(x,0)=\sin \pi x,\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\ 0\leqslant t\end{cases}$$

---

① 武汉大学、山东大学计算数学教研室，《计算方法》，第七章，§2，人民教育出版社，1979 年.

(1) 取 $h=\frac{1}{N}$(N 为正整数),列出其显式差分格式,并指出此时的稳定性条件.

(2) 设 $x_k=kh$,验证

$$U_{k,j}=\left(1-\frac{4\tau}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}\right)^j\sin\pi x_k\qquad\begin{pmatrix}k=0,1,2,\cdots,N\\ j=0,1,2,\cdots\end{pmatrix}$$

是此差分方程的解.

(3) 取 $\lambda=\frac{1}{6}$, $h=0.1$,要求计算出 $j=1,2,\cdots$诸层的数值解.

4 建立下述可变系数线性方程定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=e^x\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), 0<x<1, 0<t\\ u(x,0)=x(1-x), 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0,t)=u(1,t)=0, 0\leqslant t\end{cases}$$

的显式差分格式.

5 建立习题 4 中定解问题的六点差分格式.

6 建立下述热传导方程定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad (0<a_0\leqslant a(x)), 0<x<1,\ 0<t\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\quad 0\leqslant t\end{cases}$$

的显式差分格式,并证明如果 $a(x)\leqslant b$, b 是一个正的常数,则当满足条件 $b^2\frac{\tau}{h^2}\leqslant\frac{1}{2}$时,所建立的差分格式是稳定的.

7 在 6 题中,假定所考察的热传导方程定解问题的解 $u(x,t)$ 在区域 $G\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant T\}$中连续,且有有界的偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$,证明在满足条件 $b^2\frac{\tau}{h^2}\leqslant\frac{1}{2}$时,所建立的显式差分格式的解 U 收敛于原问题的解 u.

8 利用显式差分格式数值求解一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, 0<x<1, 0<t\\ u(x,0)=x(1-x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0,t)=u(1,t)=0, 0\leqslant t\end{cases}$$

取 $\lambda=1$, $h=0.1$, 要求算出 $j=1,2,\cdots,8$ 共八层的数值解.

9　建立一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bu, & 0<x<l, 0<t\\ u(x,0)=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x), & 0\leqslant x\leqslant l\\ u(0,t)=\mu_1(t), u(l,t)=\mu_2(t), & 0\leqslant t\end{cases}$$

的显式差分格式, 其中 a, b 均为常数.

10　利用隐式差分格式数值求解热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t, & 0<x<\pi, 0<t\\ u(x,0)=\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ u(0,t)=\dfrac{1}{2}t^2, u(\pi,t)=\dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\end{cases}$$

取 $\lambda=\dfrac{1}{6}$, $h=\dfrac{\pi}{10}$, 要求计算出 $j=1,2,3$ 共三层数值解.

11*　证明:

(1) 函数组 $\left\{\sin\dfrac{mk\pi}{N}\right\}$ $(m=1,2,\cdots,N-1)$ 是一正交函数组.

(2) 等式 $\dfrac{N}{2}\sum\limits_{m=1}^{N-1}a_m^2=\sum\limits_{k=1}^{N-1}\varepsilon_{k,0}^2$ 成立.

第八章 有 限 元 法

有限元法是近十几年来迅速发展起来并获得广泛应用的一种计算方法．它是在变分原理的基础上进行离散化处理，用来求解数学物理问题的一种很有实用价值的数值计算方法．它起源于结构问题的矩阵分析，首先应用于航空部门，由于其方法的有效性，迅速推广应用于造船，土木建筑，机械等工程部门，并取得了显著的效果．当前电子计算机的迅速发展，也为有限元法提供了重要的计算工具．

在这章里，我们将以求解平面稳定温度场——拉普拉斯方程为例，介绍有限元法的基本思想及具体做法．为确定起见，我们将主要讨论热交换边界条件的情况．这里所讨论的内容，对于用拉普拉斯方程描述的其它工程技术问题，或物理力学问题，也都是适用的．最后介绍了热传导方程与波动方程的有限元法．

§8-1 变 分 原 理

1 初等变分原理

设已给定二元函数 $F(x, y)$，令自变量 x, y 分别取得变分（又称改变量）$\delta x, \delta y$，于是二元函数在点 (x, y) 的邻域内的泰勒展开式为下式

$$F(x+\delta x, y+\delta y)=F(x, y)+\delta F(x, y)+\frac{1}{2!}\delta^2 F(x, y)+\cdots\cdots \tag{8.1.1}$$

其中

$$\delta F(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y \tag{8.1.2}$$

$$\delta^2 F(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\delta x^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\delta x\delta y+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2 \tag{8.1.3}$$

………………………………………………………………

它们都依赖于(x, y)，同时又分别是$(\delta x, \delta y)$的一次及二次型（这里是指一次及二次齐次函数），其系数即$F(x, y)$的偏导数是在点(x, y)处计算．$F(x, y)$在某点达到极值的必要条件是一阶变分δF恒为零，即

$$\delta F(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y\equiv 0 \tag{8.1.4}$$

它等价于方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{8.1.5}$$

当二次变分$\delta^2 F(x, y)>0$满足时，$\delta F(x, y)\equiv 0$也成为函数$F(x, y)$在点(x, y)达到极值的充要条件，并且这时的极值是极小值．注意到二阶变分$\delta^2 F(x, y)>0$意味着它自己是正定的，也就是说二阶导数矩阵

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}, & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\end{bmatrix} \tag{8.1.6}$$

在有关的点为正定．

上面所说的把函数的极值问题转化为等价的方程组(8.1.5)求解的方法就是所谓**初等变分原理**，虽然这种思想方法很简单，却十分重要．它启示我们将数学物理中的许多定解问题转化为等价的泛函（函数的函数）的极值问题，即变分问题．更进一步，又通过离散化处理，将变分问题化为线性代数方程组问题，从而通过解代数方程组得到原定解问题的近似解．

2 拉普拉斯方程的变分原理

对于满足热交换条件的平面稳定温度场，设内部无热源，我们已知其温度函数 $u=u(x, y)$ 是如下拉普拉斯方程第三边值问题的解:

$$
\begin{cases}
\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \text{当}(x, y)\in\Omega & (8.1.7)\\
\left[\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]\Big|_{\Gamma}=\nu & (8.1.8)
\end{cases}
$$

其中 ν, σ 均为边界上点的已知函数，且 $\sigma\geqslant 0$，至少在一部分边界上 $\sigma>0$，而 n 表示边界曲线的外法线方向.

设 $M=\{u(x, y)\}$ 是一函数集合，其中每一个函数及其一阶偏导数在 $\Omega+\Gamma$ 上连续，在 Ω 中具有二阶连续偏导数.

作出下述表达式:

$$
F[u]=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\sigma u^2-\nu u\right)ds, \quad u\in M \tag{8.1.9}
$$

其中 s 为 Γ 上的弧长参数. 显然，对每一个函数 $u\in M$，把它代入(8.1.9)式右端进行积分，就可求得 $F[u]$ 的数值，给定不同的函数 u，就得到 $F[u]$ 的不同数值. 因此 $F[u]$ 可以看成是“函数的函数”. 这种“函数的函数”就称为**泛函**. 由于泛函(8.1.9)是用积分定义的，且被积函数中包含 u 及 u 的偏导数的平方项，故又称**二次积分泛函**. 下面叙述微分方程边值问题(8.1.7)，(8.1.8)与泛函(8.1.9)取极小值之间的变分原理.

变分原理 拉普拉斯方程第三边值问题(8.1.7)，(8.1.8)的解 $u\in M$ 必定使泛函(8.1.9)取得极小值；反之，使泛函(8.1.9)取得极小值的函数 $u\in M$ 必定是拉普拉斯方程第三边值问题(8.1.7)，(8.1.8)的解.

先证明前一部分，即如果函数 $u(x,y)\in M$ 是边值问题(8.1.7)，(8.1.8)的解，则它必定使泛函(8.1.9)取得极小值。事实上，若 $u^*(x,y)$ 是函数集合 M 中另一函数，于是 $u^*(x,y)=u(x,y)+\eta(x,y)$，其中 $\eta(x,y)\in M$，我们有

$$
\begin{aligned}
\Delta F &= F[u^*]-F[u]=\frac{1}{2}\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]dxdy \\
&\quad -\frac{1}{2}\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\int_\Gamma\left[\frac{1}{2}\sigma(u+\eta)^2-\nu(u+\eta)\right]ds \\
&\quad -\int_\Gamma\left[\frac{1}{2}\sigma u^2-\nu u\right]ds=\iint_\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]dxdy+\int_\Gamma[\sigma u-\nu]\eta ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\int_\Gamma\frac{1}{2}\sigma\eta^2 ds \\
&= -\iint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\eta dxdy+\int_\Gamma\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds}\right]\right. \\
&\quad \left.+\sigma u-\nu\right\}\eta ds+\frac{1}{2}\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\frac{1}{2}\int_\Gamma\sigma\eta^2 ds
\end{aligned}
\tag{8.1.10}
$$

因为 u 是边值问题 (8.1.7) 的解，故上式第一项为零；又由于 $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds}$，由边界条件(8.1.8)知上式第二项也为零。已知 $\sigma>0$，上式第三、四项显然是正的，于是 $\Delta F>0$。因此 u 确实给出泛函的最小值。

现证明后一部分，即如果 $u(x,y)\in M$ 使泛函(8.1.9)取得极小值，则它必定是边值问题(8.1.7)，(8.1.8)的解。事实上，考虑函数 $u(x,y)+\alpha\eta(x,y)$，其中 $\eta(x,y)$ 是 M 中的任意函数，α 是一个参数。显然 $u(x,y)+\alpha\eta(x,y)\in M$，由于 $u(x,y)$ 给出泛函 F 的最小值，所以

$$F[u+\alpha\eta]\geqslant F[u]$$

泛函 $F[u+\alpha\eta]$ 作为 α 的函数，在 $\alpha=0$ 时取最小值，故一阶变分

$$\delta F=\frac{d}{d\alpha}F[u+\alpha\eta]\big|_{\alpha=0}\cdot 1=0$$

即

$$\delta F=\iint_\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]dxdy+\int_\Gamma[\sigma u-\nu]\eta ds=0 \tag{8.1.11}$$

将格林公式用到 δF 中的二重积分项，得出

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]dxdy=\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\eta\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\eta\right)\right]dxdy$$

$$-\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\eta\, dxdy$$

$$=\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\eta dy-\frac{\partial u}{\partial y}\eta dx\right)-\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\eta\, dxdy$$

以此代人前面的 δF 中，得出一阶变分的表达式如下

$$\delta F=-\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\eta\, dxdy+\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u-\nu\right]\eta\, ds=0 \qquad (8.1.12)$$

其中 $\eta(x, y)$ 为任意的连续二阶可微的函数。

以下证明(8.1.12)成立时必定有 u 满足(8.1.7)，(8.1.8)。反证法。

第一，若 u 在 Ω 内不满足 $\Delta u=0$，那末至少必存在一点 $(x_0, y_0)\in\Omega$，使得 $\Delta u|_{(x_0,y_0)}\neq 0$。为确定起见，不妨设

$$\Delta u|_{(x_0,y_0)}>0$$

由于连续性，必存在以 (x_0, y_0) 为中心，以适当小的 ε 为半径的圆 D_ε，使 D_ε 全部落在 Ω 中，如图 8-1 所示，且对 D_ε 上任意一点都有

$$\Delta u\geqslant\gamma>0$$

其中 γ 是一个正常数。作函数

$$\eta(x, y)=\begin{cases}\varepsilon^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2, & (x, y)\in D_\varepsilon\\ 0, & (x, y)\in\Omega+\Gamma-D_\varepsilon\end{cases} \qquad (8.1.13)$$

以此代入(8.1.12)式左端，得出

$$\delta F=-\iint_{D_\varepsilon}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\eta\, dxdy<-\gamma\cdot\iint_{D}\eta\, dxdy<0$$

这与(8.1.12)中 $\delta F=0$ 矛盾。故 u 在 Ω 内恒满足(8.1.7)。

第二，由第一已证明的 $\Delta u=0$，故(8.1.12)变成为

$$\delta F=\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u-\nu\right]\eta\, ds=0 \qquad (8.1.14)$$

若 u 在 Γ 上不满足 $\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u-\nu\right]\Big|_{\Gamma}=0$，那末至少必存在一点 $(x_0, y_0)\in\Gamma$，使得 $\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u-\nu\right]\Big|_{(x_0,y_0)}\neq 0$。为确定起见，不妨设

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u-\nu\right]\Big|_{(x_0,y_0)}>0$$

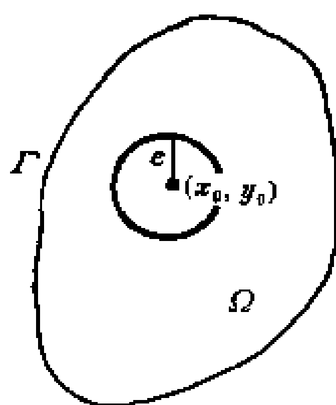


图 8-1

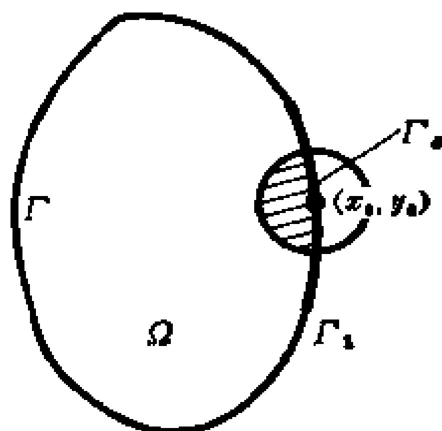


图 8-2

由于连续性，在Γ上必存在一个包含(x_0, y_0)点的曲线段Γ_1，如图 8-2 所示，使在Γ_1上恒有

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u-\nu\right]\geqslant\gamma>0$$

其中γ是一个正常数.

以(x_0, y_0)为中心，适当小的e为半径作圆D_e，使它与Γ相交的线段$\Gamma_e\subset\Gamma_1$. 现在取(8.1.14)中的$\eta(x, y)$如下:

$$\eta(x, y)=\begin{cases}e^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2, & (x, y)\in D_e\cap(\Omega+\Gamma)\\ 0, & (x, y)\in\Omega+\Gamma \text{ 的其余部分}\end{cases} \tag{8.1.15}$$

其中$D_e\cap(\Omega+\Gamma)$表示D_e与$\Omega+\Gamma$的公共部分，如图 8-2 中阴影部分. 以(8.1.15)式代入(8.1.14)的左端，得出

$$\delta F=\int_{\Gamma_e}\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u-\nu\right]\eta ds\geqslant\gamma\int_{\Gamma_e}\eta ds>0$$

这与(8.1.14)中$\delta F=0$相矛盾. 故u在Γ上恒满足(8.1.8). 证毕.

由这个变分原理可知，求解拉普拉斯方程第三边值问题(8.1.7)、(8.1.8)就已化为求泛函(8.1.9)的极小值问题(称为变分问题). 在此基础上，对变分问题进行离散化，就可导至有限元法，求出变分问题的近似解，它就是(8.1.7)，(8.1.8)的近似解.

§8-2 有限元法计算格式

根据§8-1 的变分原理，就可用有限元法近似求解平面稳定

温度场，即找出边值问题(8.1.7)、(8.1.8)的有限元解。

1 区域的剖分方式

将求解区域 $\Omega+\Gamma$ 剖分为有限个互不重迭的三角形单元所组成，如图 8-3 所示。但需要注意不能把一个三角形的顶点取为

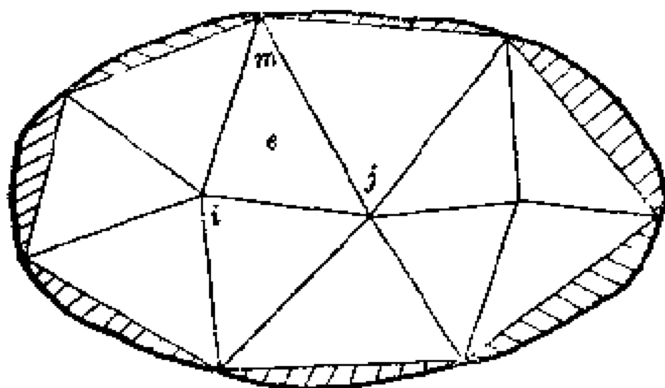


图 8-3

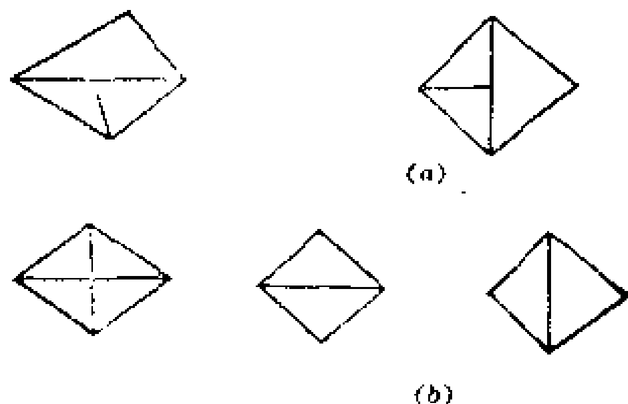


图 8-4

另一个相邻三角形的边的内点。因此，如图 8-4，(*a*)中的剖分方式是不允许的，而应该采用(*b*)中的剖分方式。这种剖分要遍及整个区域直至边界，当边界为曲线时，可在每一小段上近似地用相应的直线段代替，并取为三角形单元的一边(如图 8-3)。

每个三角形单元的三个顶点均取为结点。与有限差分法一样，我们着眼于寻求结点上温度函数的近似值。由于这时不必要求采用直交网格，所以结点的配置方式是相当任意的。

当进行有限元剖分后，将所有的结点和三角形单元分别按一定的顺序从 1 开始编号。每个结点 l 的坐标 $x(l)$ 及 $y(l)$，以及构成三角形单元 e 的三个点的编号 $i(e)$，$j(e)$，$m(e)$(按逆时针顺序排列)都是计算中所需要的信息。

为了统一计算格式，在剖分三角形单元时可约定每个边界元只有一条边落在边界曲线上，这一边相对的顶点在信息输入时放在三角形单元的三结点中的第一个位置，记为 $i(e)$。

2 温度插值函数的构造

在每个三角形单元上构造变分问题解 $u=u(x,y)$ 的线性插值函数

$$u^{(e)}=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y,\quad (x,y)\in\Delta_e \tag{8.2.1}$$

其中常数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是待定常数，可由结点上函数值确定，Δ_e 表示三角形单元 e 的区域。

如图8-5，对任一三角形单元 e，其中三个结点 i,j,m（按逆时针顺序排列）上的温度值设为 u_i，u_j，u_m，而此三结点的坐标分别为 (x_i,y_i)，(x_j,y_j)，(x_m,y_m)，就有三角形元 e 的面积

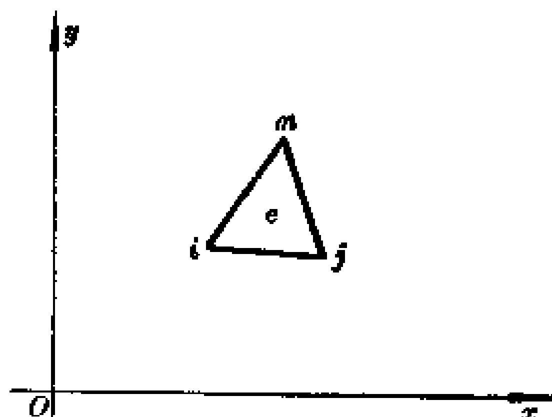


图 8-5

$$\Delta_e=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix} \tag{8.2.2}$$

现在令 $u^{(e)}$ 在三角形单元三个顶点的值分别等于 u_i,u_j,u_m，即

$$u_i^{(e)}=u_i=\alpha_1+\alpha_2 x_i+\alpha_3 y_i$$

$$u_j^{(e)}=u_j=\alpha_1+\alpha_2 x_j+\alpha_3 y_j$$

$$u_m^{(e)}=u_m=\alpha_1+\alpha_2 x_m+\alpha_3 y_m$$

解此方程组得出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{2\Delta_e}(a_i u_i+a_j u_j+a_m u_m)\\[2ex] \alpha_2=\dfrac{1}{2\Delta_e}(b_i u_i+b_j u_j+b_m u_m)\\[2ex] \alpha_3=\dfrac{1}{2\Delta_e}(c_i u_i+c_j u_j+c_m u_m)\end{cases} \tag{8.2.3}$$

其中

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j, & a_j = x_m y_i - x_i y_m, & a_m = x_i y_j - x_j y_i \\ b_i = y_j - y_m, & b_j = y_m - y_i, & b_m = y_i - y_j \\ c_i = x_m - x_j, & c_j = x_i - x_m, & c_m = x_j - x_i \end{cases} \tag{8.2.4}$$

这样一来，我们就得出三角形单元 e 上的温度线性插值函数为

$$u^{(e)} = \frac{1}{2\Delta_e}[(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m] \tag{8.2.5}$$

由于采用的是线性插值，所以任意两个相邻三角形单元的公共边上，如此构造的插值函数显然保持连续性，称此为满足**相容性条件**.

令

$$\begin{cases} N_i(x,y) = \dfrac{1}{2\Delta_e}(a_i + b_i x + c_i y), \quad N_j(x,y) = \dfrac{1}{2\Delta_e}(a_j + b_j x + c_j y), \\ N_m(x,y) = \dfrac{1}{2\Delta_e}(a_m + b_m x + c_m y) \end{cases} \tag{8.2.6}$$

则(8.2.5)改写为

$$u^{(e)} = u_i \cdot N_i(x,y) + u_j N_j(x,y) + u_m N_m(x,y) \tag{8.2.7}$$

将每个三角形单元上构造的线性插值函数 $u^{(e)}$ 合并起来，就得出 $u(x,y)$ 在整个网格区域 Ω_h 上的分块近似函数：

$$u_N(x,y) = u^{(e)}(x,y) = u_i \cdot N_i(x,y) + u_j \cdot N_j(x,y) + u_m \cdot N_m(x,y) \tag{8.2.8}$$

上面用线性插值方法构造出来的插值函数 $u^{(e)}$. 其值在 $\overline{jm}$ 边上也是在 u_j 与 u_m 间线性变化的. 如果以 t 表示 $\overline{jm}$ 边上的变动参数，而 $t=0$ 时对应于 j 点，$t=1$ 时对应于 m 点，则 $\overline{jm}$ 边上此插值函数可表为

$$(1-t)u_j+tu_m \qquad (0<t<1) \tag{8.2.9}$$

若 $\overline{jm}$ 边的边长为

$$s_i=\sqrt{(x_j-x_m)^2+(y_j-y_m)^2} \tag{8.2.10}$$

那末容易得出

$$t=\frac{s}{s_i} \tag{8.2.11}$$

其中 s 是 $\overline{jm}$ 边上从 j 点算起的弦长参数.

3 单元刚度分析

所谓单元刚度分析就是指在三角形单元及线元(单元的边界元)上把泛函(8.1.9)离散化为二次函数的方法，这是完全标准化的.

由(8.2.5)式可得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u^{(e)}}{\partial x}=\dfrac{1}{2\Delta_e}[b_iu_i+b_ju_j+b_mu_m]\\[2ex]\dfrac{\partial u^{(e)}}{\partial y}=\dfrac{1}{2\Delta_e}[c_iu_i+c_ju_j+c_mu_m]\end{cases} \tag{8.2.12}$$

于是以(8.2.12),(8.2.9),(8.2.10),(8.2.11)代入泛函(8.1.9),可知泛函 F 在单元 e 上之值可改为

$$\begin{aligned}F_e&=\frac{1}{2}\iint_e\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\int_{\Gamma\cap e}\left(\frac{1}{2}\sigma u^2-\nu u\right)ds\\&=\frac{1}{2}\iint_e\frac{1}{4\Delta_e^2}\{(b_iu_i+b_ju_j+b_mu_m)^2\\&\quad+(c_iu_i+c_ju_j+c_mu_m)^2\}dx\,dy+\\&\quad+s_i\int_0^1\left[\frac{1}{2}\sigma_i((1-t)u_j+tu_m)^2-\nu_i((1-t)u_j+tu_m)\right]dt\\&=\frac{1}{8\Delta_e}[(b_iu_i+b_ju_j+b_mu_m)^2+(c_iu_i+c_ju_j+c_mu_m)^2]+\end{aligned}$$

$$+s_i\int_0^1\left[\frac{1}{2}\sigma_i((1-t)u_j+tu_m)^2-\nu_i((1-t)u_j+tu_m)\right]dt$$

(8.2.13)

上式中，$\Gamma\cap e$ 表示 Γ 与 e 的公共部分。因此，若 e 是内部单元，则第二项积分就不出现，或认为 $\sigma_i=\nu_i=0$。从(8.2.13)式可见，F_e 是单元 e 的结点温度的二次函数。

由(8.1.9)式，将(8.2.13)式表示的每个单元 e 上的泛函值叠加起来，就得到整个区域 $\Omega+\Gamma$ 上的泛函值，它自然也是结点温度的二次函数，可写为

$$F=\sum_{l=1}^{e_0}F_e=\frac{1}{2}\sum_{l,h=1}^{l_0}k_{l,h}u_lu_h-\sum_{l=1}^{l_0}p_lu_l \qquad (8.2.14)$$

其中 e_0 是单元的总数，l_0 是结点的总数，而 $k_{l,h}$ 及 p_l 的具体形成见后一段 4。(8.2.14)中的二次项

$$\frac{1}{2}\sum_{l,h=1}^{l_0}k_{l,h}u_lu_h$$

由积分

$$\sum_{e=1}^{e_0}\left\{\frac{1}{2}\iint_e\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\int_{\Gamma\cap e}\sigma u^2ds\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\frac{1}{2}\int\sigma u^2ds \qquad (8.2.15)$$

所决定。由于至少在一部分区域边界上 $\sigma>0$，因此积分在 $u\not\equiv 0$ 时恒大于零，相应的二次型

$$\sum_{l,h=1}^{l_0}k_{l,h}u_lu_h$$

一定是正定二次型，其系数矩阵 $k=(k_{l,h})$ 一定是对称正定矩阵，称为温度刚度矩阵。

根据使泛函达到极小的要求，结点上的温度值$\{u_l\}(l=1, 2, \cdots, l_0)$应满足条件

$$\frac{\partial F}{\partial u_l}=\sum_{e=1}^{e_0}\frac{\partial F_e}{\partial u_l}=0 \quad (l=1,2,\cdots,l_0) \tag{8.2.16}$$

由于只有对以 l 为结点的单元 e, F_e 的表达式中才含有 u_l, 因此和式(8.2.16)名义上是对一切单元 e 作和，实际上只要对一切以 l 为结点的单元 e 作和即可。

由(8.2.14)式可知，(8.2.16)式可写成为

$$\sum_{h=1}^{l_0}k_{l,h}u_h=p_l \quad (l=1,2,\cdots,l_0) \tag{8.2.17}$$

这是一个以结点温度 $u_l(l=1,2,\cdots,l_0)$为未知数的线性代数方程组，其系数矩阵是一个对称正定矩阵，解出它就可求得结点温度的近似值. 因此，用有限元法列计算格式，实际上就是要形成刚度矩阵 $K=(k_{l,h})$及右端向量$P=(p_1,p_2,\cdots,p_{l_0})^T$. 称(8.2.17)为**有限元方程**.

4 刚度矩阵 K 及向量 P 的计算

从(8.2.16)、(8.2.17)式可知，$k_{l,h}$ 就是$\frac{\partial F}{\partial u_l}=\sum_{e=1}^{e_0}\frac{\partial F_e}{\partial u_l}$中$u_h$前面的系数. 因此，只要对一切以 l 为结点的单元e，把$\frac{\partial F_e}{\partial u_l}$中含有 u_h 项的系数叠加起来，就可求得$k_{l,h}$. 同样，P_l与 $\frac{\partial F}{\partial u_l}=\sum_{e=1}^{e_0}\frac{\partial F_e}{\partial u_l}$ 中的自由项只相差一个符号. 因此，只要对一切以 l 为结点的单元 e，把 $\frac{\partial F_e}{\partial u_l}$ 中的自由项反号后再叠加起来就可求得 P_l. 这里每一叠加上去的

部分就分别称为对 $k_{l,h}$ 或 P_l 的“贡献”。

对于单元 $e(i,j,m)$ 来说，若记

$$\Phi=\frac{1}{4\Delta_e} \tag{8.2.18}$$

由(8.2.13)式，就有

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_e}{\partial u_i}&=\Phi\cdot\{(b_iu_i+b_ju_j+b_mu_m)b_i+(c_iu_i+c_ju_j+c_mu_m)c_i\}\\&=u_i\{\Phi\cdot(b_i^2+c_i^2)\}+u_j\{\Phi\cdot(b_ib_j+c_ic_j)\}\\&\quad+u_m\{\Phi\cdot(b_ib_m+c_ic_m)\}\end{aligned} \tag{8.2.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_e}{\partial u_j}&=\Phi\cdot\{(b_iu_i+b_ju_j+b_mu_m)b_j+(c_iu_i+c_ju_j+c_mu_m)\,c_j\}\\&\quad+s_i\int_0^1[\sigma_i(1-t)((1-t)u_j+tu_m)-\nu_i(1-t)]dt\\&=u_i\{\Phi\cdot(b_jb_i+c_jc_i)\}+u_j\left\{\Phi(b_j^2+c_j^2)+\frac{\sigma_is_i}{3}\right\}\\&\quad+u_m\left\{\Phi\cdot(b_m^2+c_m^2)+\frac{\sigma_is_i}{6}\right\}-\frac{\nu_is_i}{2}\end{aligned} \tag{8.2.20}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_e}{\partial u_m}&=\Phi\cdot\{(b_iu_i+b_ju_j+b_mu_m)b_m+(c_iu_i-c_ju_j+c_mu_m)c_m\}\\&\quad+s_i\int_0^1[\sigma_it((1-t)u_j+tu_m)-\nu_it]dt\\&=u_i\{\Phi(b_mb_i+c_mc_i)\}+u_j\left\{\Phi(b_mb_j+c_mc_j)+\frac{\sigma_is_i}{6}\right\}\\&\quad+u_m\left\{\Phi(b_m^2+c_m^2)+\frac{\sigma_is_i}{3}\right\}-\frac{\nu_is_i}{2}\end{aligned} \tag{8.2.21}$$

这样，每个单元 $e(i,j,m)$ 对刚度矩阵 K 中 k_{ii}, k_{jj}, k_{mm}, $k_{ij}=k_{ji}$, $k_{im}=k_{mi}$ 和 $k_{jm}=k_{mj}$ 的“贡献”分别是

$$\begin{cases}\Phi\cdot(b_i^2+c_i^2), & \Phi(b_j^2+c_j^2)-\dfrac{\sigma_is_i}{3}\\ \Phi\cdot(b_m^2+c_m^2)+\dfrac{\sigma_is_i}{3}, & \Phi\cdot(b_ib_j+c_ic_j)\\ \Phi\cdot(b_ib_m+c_ic_m), & \Phi\cdot(b_jb_m+c_jc_m)+\dfrac{\sigma_is_i}{6}\end{cases} \tag{8.2.22}$$

而对右端向量P中的p_j及p_m的"贡献"分别是

$$\frac{\nu_i S_i}{2}, \quad \frac{\nu_i S_i}{2} \tag{8.2.23}$$

把每个单元的这种"贡献"按照相应的地址全部叠加起来，就可以形成刚度矩阵K及右端向量P，从而完成用有限元法列计算格式的工作．这一工作，在输入一些必要的原始信息后，可以由电子计算机自动地执行．

§8-3 超松弛迭代法

从§8-2可以看出，用有限元法求解问题最后都归结为求解具有对称正定系数矩阵的线性代数方程组．本节讨论求解此种方程组的办法，对于拉普拉斯方程一类的定解问题，用超松弛迭代法求解是方便有效的．

1 迭代法

对于§8-2中所得出的线性代数方程组(8.2.17)式为

$$\sum_{h=1}^{l_0} k_{l,h} u_h = p_l \qquad (l=1,2,\cdots,l_0) \tag{8.3.1}$$

其中矩阵$K=(k_{l,h})$为对称正定矩阵，其一切主对角线上元素

$$k_{l,l}>0 \qquad (l=1,2,\cdots,l_0) \tag{8.3.2}$$

故行列式$\det K>0$，于是方程组(8.3.1)必定有唯一解．下面介绍求解方法．

我们从(8.3.1)的第l个方程中解出u_l，将方程组(8.3.1)改写成下式

$$u_l = -\sum_{h=1}^{l-1} \frac{k_{l,h}}{k_{l,l}} u_h - \sum_{h=l+1}^{l_0} \frac{k_{l,h}}{k_{l,l}} u_h + \frac{p_l}{k_{l,l}} \qquad (l=1,2,\cdots,l_0) \tag{8.3.3}$$

任取一组初值$\{u_l^{(0)}\}(l=1,2,\cdots,l_0)$作为零次近似，根据(8.3.3)式，可用以下方式依次构造一次近似$\{u_l^{(1)}\}$：

$$u_l^{(1)}=-\sum_{h=1}^{l-1}\frac{k_{l,h}}{k_{l,l}}u_h^{(1)}-\sum_{h=l+1}^{l_0}\frac{k_{l,h}}{k_{l,l}}u_h^{(0)}+\frac{p_l}{k_{l,l}}\qquad(l=1,2,\cdots,l_0)$$

(8.3.4)

这里由于在用(8.3.4)式计算$u_l^{(1)}$值之前，$u_1^{(1)},u_2^{(1)},\cdots u_{l-1}^{(1)}$，即$u_h^{(1)}(h=1,2,\cdots,l-1)$已经依次用(8.3.4)式中前面$l-1$个式子计算得到了，因此在(8.3.4)式右端出现的一次近似值$u_h^{(1)}(h=1,2,\cdots,l-1)$是有意义的，即用(8.3.4)式依次来构造一次近似$\{u_l^{(1)}\}$是可行的。

一般说来，在求得第m次近似$\{u_l^{(m)}\}$后，就可用下式依次构造第$m+1$次近似$\{u_l^{(m+1)}\}$：

$$u_l^{(m+1)}=-\sum_{h=1}^{l-1}\frac{k_{l,h}}{k_{l,l}}u_h^{(m+1)}-\sum_{h=l+1}^{l_0}\frac{k_{l,h}}{k_{l,l}}u_h^{(m)}+\frac{p_l}{k_{l,l}}\quad(l=1,2,\cdots,l_0)$$

(8.3.5)

在这一步，我们可称$u_l^{(m)}$为老值，而称$u_l^{(m+1)}$为新值。由于迭代是按$l=1,2,\cdots,l_0$的次序依次进行的，在求新值$u_l^{(m+1)}$之前，编号比l小的变量的新值$u_1^{(m+1)}$，$u_2^{(m+1)}$，……，$u_{l-1}^{(m+1)}$都已经依次求得，而编号比l大的变量还停留在老值$u_{l+1}^{(m)},\cdots,u_{l_0}^{(m)}$上，这样，我们就可看到迭代式(8.3.5)的特点是其右端表达式中的变量能用新值的就尽量用新值代入，没有新值的就用老值代入。因此新值一经求出，老值$u_l^{(m)}$在迭代中就立即失去了作用。所以及时的进行这种“以新换旧”的手续，可以使我们只用一套存储单元，就可以存储未知量的逐次近似值。容易看出，上述迭代格式(8.3.5)就是我们在前面所述的异步迭代法。

由于$K=(k_{l,h})$是对称正定矩阵，可以证明，不论零次近似是

如何选择的，这样构造的迭代序列$\{u_l^{(m)}\}$$(l=1,2,\cdots,l_0)$当迭代次数$m\to\infty$时，一定收敛于方程组(8.3.1)的解．因此，经过适当多次的迭代后，就可以使相邻二次迭代间的误差小于事先给定的充分小的控制误差值，而得到足够近似的解．

2　超松弛迭代法

通常，异步迭代法(8.3.5)的收敛速度是很慢的．为了加快收敛速度，可以对上述迭代式进行适当的修改．我们引入一个松弛因子ω，而将迭代格式适当修改为

$$u_l^{(m+1)}=\omega\cdot\left\{-\sum_{h=1}^{l-1}\frac{k_{l,h}}{k_{l,l}}u_h^{(m+1)}-\sum_{h=l+1}^{l_0}\frac{k_{l,h}}{k_{l,l}}u_h^{(m)}+\frac{p_l}{k_{l,l}}\right\}+(1-\omega)u_l^{(m)} \tag{8.3.6}$$

$$(l=1,2,\cdots,l_0)$$

如令

$$\tilde{u}_l=-\sum_{h=1}^{l-1}\frac{k_{l,h}}{k_{l,l}}u_h^{(m+1)}-\sum_{h=l+1}^{l_0}\frac{k_{l,h}}{k_{l,l}}u_h^{(m)}+\frac{p_l}{k_{l,l}} \tag{8.3.7}$$

则(8.3.6)可写成为下式

$$u_l^{(m+1)}=\omega\tilde{u}_l+(1-\omega)u_l^{(m)} \tag{8.3.8}$$

(8.3.7)、(8.3.8)等价于(8.3.6)．

由于$K=(k_{l,h})$是对称正定矩阵，迭代格式(8.3.6)(或(8.3.7)、(8.3.8))只有当松弛因子ω之值满足条件$0<\omega<2$时才是收敛的．通常，松弛因子ω以在范围$1<\omega<2$中选取为佳，这称为**超松弛迭代法**．但也不排斥对某些问题在范围$0<\omega<1$中选取ω的可能性，此时称为**低松弛迭代法**．

实例计算表明，较好的松弛因子会大大加快收敛速度．对于一般的平面问题，取ω略大于1.8为好．利用优选法选择松弛因子，也是一种可取的办法．

我们还可以证明，由(8.2.14)式所表示的二次型

$$F[u]=\frac{1}{2}\sum_{i,h=1}^{l_0}k_{i,h}u_iu_h-\sum_{i=1}^{l_0}p_iu_i \qquad (8.3.9)$$

在利用(8.3.6)式进行迭代时，必成立

$$F[u^{(m+1)}]\leqslant F[u^{(m)}] \qquad (m=0,1,2,\cdots\cdots) \qquad (8.3.10)$$

注意到在有限元法出现的线性代数方程组(8.3.1)式，正是由相应于系统总位能的二次型(8.3.9)式取极小的要求而得到的．(8.3.10)式表明，在用(8.3.6)式进行迭代的过程中，逐次近似所相应的泛函值不断减少，向极小值逼近．因此迭代过程的收敛和使泛函取得极小的过程是一致的．这说明迭代格式(8.3.6)的设计也是和变分原理的要求相吻合的．

§8-4　计算格式举例

现在就来说明用有限元法列计算格式的方法．为研究起来方便起见，我们考虑拉普拉斯方程第一边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & 0<x,y<\pi\\ u|_{x=0}=u|_{x=\pi}=u|_{y=0}=0, & 0\leqslant x,y\leqslant\pi\\ u|_{y=\pi}=\sin x, & 0<x<\pi\end{cases} \qquad (8.4.1)$$

若令 $M=\{u(x,y)\}$ 为满足(8.4.1)中边界条件的一切具有二阶连续偏导数的函数所构成的集合（在 $\Omega+\Gamma$ 上），则象§8-1那样，能证明如下的变分原理：

若 $u=u(x,y)$ 是(8.4.1)的解，则在 M 中 u 就能使泛函

$$F[u]=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy \qquad (8.4.2)$$

达到极小值；反之，在 M 中使泛函(8.4.2)达到极小值的函数 $u=u(x,y)$ 一定是(8.4.1)的解．

根据这个变分原理，就可用有限元法来近似求解拉普拉斯方程第一边值问题(8.4.1).

设在矩形区域的情况下，采取如图 8-6 所示的直交网格构成的直角三角形单元，其直角边长为 h. 为方便起见，下面我们记结点 $x=rh$, $y=sh$(r, s 为正整数)上的函数值为 $u[r,s]$，此结点有时也记为(r,s).

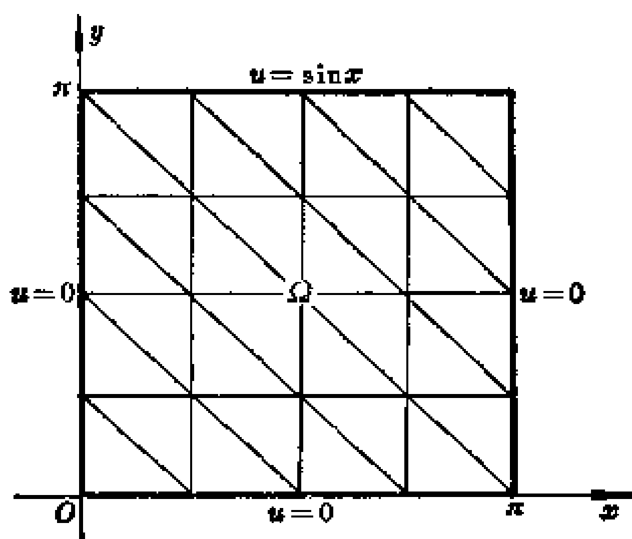


图 8-6

用有限元法列计算格式，对每一个结点 l 都要列一个方程：$\frac{\partial F}{\partial u_l}=\sum_{e=1}^{e_l}\frac{\partial F_e}{\partial u_l}=0$，从而构成一个线性代数方程组. 而在每一个结点 l 列方程时，实际上只涉及到一切以 l 为结点的单元 e，因而只涉及到结点 l 周围一圈结点上的函数值. 为了明显地得到在 l 点的计算格式，我们只要在这些以 l 为结点的单元 e 上算出$\frac{\partial F_e}{\partial u_l}$的表达式，然后把它们叠加起来就可以了.

注意，这里在计算$\frac{\partial F}{\partial u_l}$时，所利用的泛函 $F[u]$(8.4.2) 是泛函(8.1.9)当 $\sigma=0$, $\nu=0$ 时特别情况，所以 § 8-2 中的全部讨论结

果、如插值函数的产生，单元刚度分析，刚度矩阵 K 的计算，都可以搬到这里来．下面对每一个内结点 l 来列方程，而边界结点的函数值是已知的，因而就不需要讨论了．

这里，对于图 8-6 所示的一切直角三角形单元，均有

$$\Delta_e=\frac{h^2}{2}$$

从而由(8.2.18)式有

$$\Phi=\frac{1}{2h^2} \tag{8.4.3}$$

下面考察内结点 $l(r,\ s)$．如图 8-7，它只涉及到六个单元 I、II、III、IV、V、VI，我们就在这六个单元上来考察．

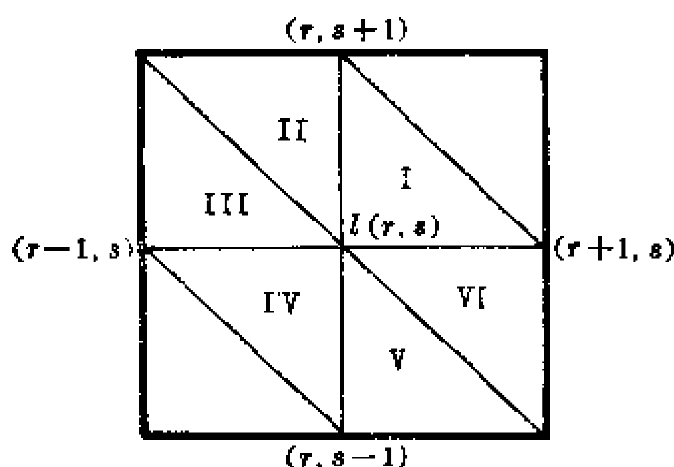


图 8-7

对于单元 I：如图 $8\text{-}8_{\rm I}$，按逆时针方向暂时将结点 $l(r,s)$，$(r+1,s)$，$(r,s+1)$ 分别记为 i,j,m，此时由(8.2.4)式得出

$$b_i=y_j-y_m=-h,\quad b_j=y_m-y_i=h,\quad b_m=y_i-y_j=0$$

$$c_i=x_m-x_j=-h,\quad c_j=x_i-x_m=0,\quad c_m=x_j-x_i=h$$

于是由(8.2.19)式，得出

$$\frac{\partial F_{\rm I}}{\partial u_l}=\frac{\partial F_{\rm I}}{\partial u_i}=\frac{1}{2}\{2u[r,s]-u[r+1,s]-u[r,s+1]\} \tag{8.4.4$_{\rm I}$}$$

对于单元 II：如图 $8\text{-}8_{\rm II}$，按逆时针方向暂时将结点 $l(r,s)$，

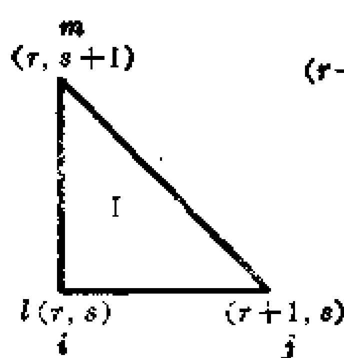


图 8-8$_{I}$

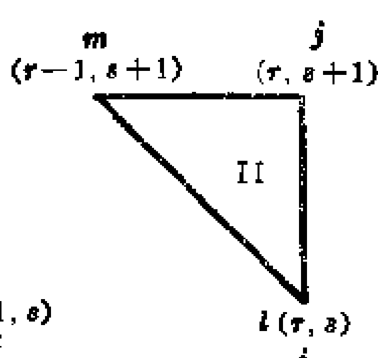


图 8-8$_{II}$

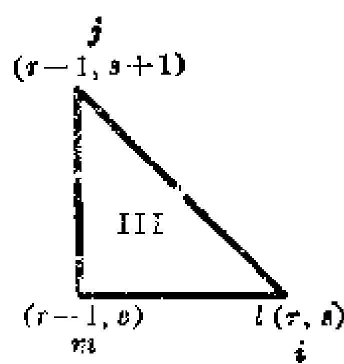


图 8-8$_{III}$

$(r, s+1)$, $(r-1, s+1)$ 分别记为 i, j, m. 此时由(8. 2. 4)式, 得出

$$b_i=0, \quad b_j=h, \quad b_m=-h$$

$$c_i=-h, \quad c_j=h, \quad c_m=0$$

于是由(8. 2. 19)式, 得出

$$\frac{\partial F_{II}}{\partial u_l}=\frac{\partial F_{II}}{\partial u_i}=\frac{1}{2}\{u[r, s]-u[r, s+1]\} \qquad (8. 4. 4_{II})$$

对于单元 III: 如图 8-8$_{III}$, 按逆时针方向暂时将结点 $l(r, s)$, $(r-1, s+1)$, $(r-1, s)$ 分别记为 i, j, m. 此时由(8. 2. 4)式, 得出

$$b_i=h, \quad b_j=0, \quad b_m=-h$$

$$c_i=0, \quad c_j=h, \quad c_m=-h$$

于是由(8. 2. 19)式, 得出

$$\frac{\partial F_{III}}{\partial u_l}=\frac{\partial F_{III}}{\partial u_i}=\frac{1}{2}\{u[r, s]-u[r-1, s]\} \qquad (8. 4. 4_{III})$$

对于单元 IV: 如图 8-9$_{IV}$, 按逆时针方向暂时将结点 $l(r, s)$, $(r-1, s)$, $(s, r-1)$ 分别记为 i, j, m. 此时由(8. 2. 4)式, 得出

$$b_i=h, \quad b_j=-h, \quad b_m=0$$

$$c_i=h, \quad c_j=0, \quad c_m=-h$$

于是由(8. 2. 19)式, 得出

$$\frac{\partial F_{IV}}{\partial u_l}=\frac{\partial F_{IV}}{\partial u_i}=\frac{1}{2}\{2u[r, s]-u[r-1, s]-u[r, s-1]\} \qquad (8. 4. 4_{IV})$$

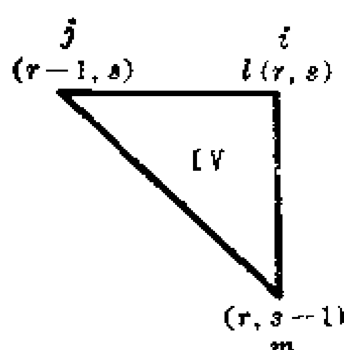


图 8-9$_{IV}$

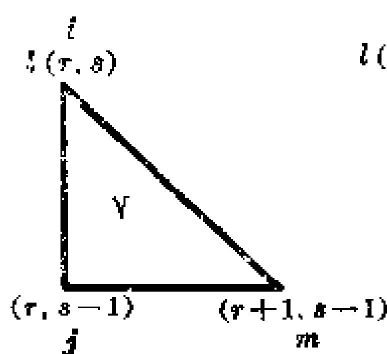


图 8-9$_{V}$

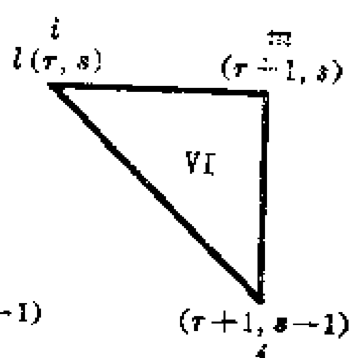


图 8-9$_{VI}$

对于单元 V：如图 8-9$_V$，按逆时针方向暂时将结点 $l(r, s)$，$(r, s-1)$，$(r+1, s-1)$分别记为 i, j, m。此时由(8.2.4)式，得出

$$b_i=0,\quad b_j=-h,\quad b_m=h$$

$$c_i=h,\quad c_j=-h,\quad c_m=0$$

于是由(8.2.19)式，得出

$$\frac{\partial F_{V}}{\partial u_l}=\frac{\partial F_{V}}{\partial u_i}=\frac{1}{2}\{u[r,s]-u[r,s-1]\}\qquad(8.4.4_V)$$

对于单元 VI：如图 8-9$_{IV}$，按逆时针方向暂时将结点 $l(r, s)$，$(r+1, s-1)$，$(r+1, s)$分别记为 i, j, m。此时由(8.2.4)式，得出

$$b_i=-h,\quad b_j=0,\quad b_m=h$$

$$c_i=0,\quad c_j=-h,\quad c_m=h$$

于是由(8.2.19)式，得出

$$\frac{\partial F_{VI}}{\partial u_l}=\frac{\partial F_{VI}}{\partial u_i}=\frac{1}{2}\{u[r,s]-u[r+1,s]\}\qquad(8.4.4_{VI})$$

将上述结果(8.4.4$_I$)—(8.4.4$_{VI}$)合并，就得出在内结点 $l(r, s)$所列的计算格式为

$$\frac{\partial F}{\partial u_l}=\sum_{e=I}^{VI}\frac{\partial F_e}{\partial u_l}=4u[r,s]-u[r+1,s]-u[r,s+1]$$

$$-u[r-1,s]-u[r,s-1]=0\qquad(8.4.5)$$

上式亦可改写为

$$u[r,s]=\frac{1}{4}\{u[r+1,s]+u[r,s+1]+u[r-1,s]+u[r,s-1]\} \tag{8.4.6}$$

(8.4.6)式表示内结点(r,s)上的函数值是它的上、下、左、右四邻点函数值的算术平均值．它就是第六章中采用有限差分法时已得到过的五点格式(6.2.1)式当$f_{ik}\equiv 0$时的情况．这说明对如图8-6所示的特殊有限单元分割方式，在内结点上用有限元法列的计算格式与用有限差分法所列的计算格式实质上是相同的．

于是对区域Ω中每一个内结点都列出如(8.4.6)式那样的结点方程式，所有的内结点上的结点方程式合并起来，就得出一个关于内结点的联立线性代数方程组．这里，在有关边界结点上的函数值u就用(8.4.1)中的边界条件代入．用异步迭代法($\omega=1$)及超松弛迭代法($\omega=1.65, 1.70, 1.75, 1.80, 1.85, 1.95$)求解所得出的线性代数方程组，就可得出第六章§6-2里例中表所表示的数值结果．

§8-5* 热传导方程和波动方程的有限元法

前面§8-1～§8-4讨论了拉普拉斯方程的有限元法．这种方法也成功地用于解热传导方程．此时，通常把时间变量t视为参数处理，从而采用类似§8-1～§8-4中的有限元法．

以下我们采用热传导方程为模型介绍有限元法．

考虑热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ 0<x<1,\quad 0<t & (8.5.1)\\ u(x,0)=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1 & (8.5.2)\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\quad 0<t & (8.5.3)\end{cases}$$

容易看出，如果对固定的t，$u(x,t)\in C^2$(C^2表示二次连续可微的函数所构成的函数空间)，则从(8.5.1)乘上函数$v(x)\in H_0^1$后，积分

$$\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-f\right)v\,dx=0,\ \text{对任意的}\ v(x)\in H_0^1,\ 0<t \tag{8.5.4}$$

其中 H_0^1 是这样的函数空间，函数本身及其一阶导数都平方可积，且它们满足条件（8.5.3）．对 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v$ 利用分部积分法，并注意边界条件(8.5.3)，由(8.5.4)导出

$$\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial t}v+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}-fv\right)dx=0,\ \text{对任意的}\ v(x)\in H_0^1,\ 0<t \tag{8.5.5}$$

从上述推导可以看出：如果 $u(x,t)$ 是（8.5.1）—（8.5.3）的（古典）解，则 u 必是(8.5.5)的解(即满足(8.5.5))；反之，(8.5.5)除了(古典)解外，还允许有非古典解，即 $u\in H_0^1$，且满足(8.5.5)、(8.5.2)称此 $u(x,t)$ 为热传导方程混合问题的**广义解**．称(8.5.5)为(8.5.1)—(8.5.3)的**变分方程**．

用结点 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{N-1}<x_N=1$ 将区间[0,1]剖分成单元 $I_j=[x_{j-1},x_j]$，并令 $h_j=x_j-x_{j-1}$．取 $\varphi_i(x)$ 为由下式定义的山形函数

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}1+\dfrac{x-x_i}{h_i}, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\\[2mm] 1-\dfrac{x-x_i}{h_{i+1}}, & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}\\[2mm] 0, & \text{在别处}\end{cases} \tag{8.5.6}$$

$$(i=1,2,\cdots,N-1)$$

显然，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_{N-1}(x)$ 为 H_0^1 中一组线性无关函数，常称为**基函数**．用 V_h 表示由$\{\varphi_i(x)\}$的线性组合构成的子空间．所谓有限元法，就是求形如

$$u_h(x,t)=\sum_{i=1}^{N-1}\mu_i(t)\varphi_i(x) \tag{8.5.7}$$

的解，使其系数满足方程

$$\int_0^1\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}v+\frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}-fv\right)dx=0,\ \text{对任意}\ v\in V_h,\ t>0 \tag{8.5.8}$$

如此确定的 $u_h(x,t)$ 就是(8.5.1)—(8.5.3)的**有限元法近似解**．

将 $u_h(x,t)$ 的表达式(8.5.7)代入(8.5.8)中，得出

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\mu_i}{dt}\int_0^1\varphi_i v dx+\mu_i\cdot\int_0^1\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{dv}{dx}dx\right)-\int_0^1 fvdx=0,$$

$$\text{对任意}\ v\in V_h,\ 0<t$$

或者，取 $v=\varphi_j(x)$，写成等价形式

$$\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{d\mu_i}{dt}\int_0^1\varphi_i\varphi_j dx+\mu_i\cdot\int_0^1\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx\right)-\int_0^1 f\varphi_j dx=0 \tag{8.5.9}$$

$$(j=1,2,\cdots,N-1)$$

它是关于 $\mu_j(t)$ 的常微分方程组。(8.5.9) 的初始条件可以由原初始条件 (8.5.2) 给出。最常用的给法是使 (8.5.7) 定义的 $u_h(x,0)$ 满足条件

$$\int_0^1 (u_h(x,0)-\psi(x))\varphi_j dx=0 \qquad (j=1,2,\cdots,N-1)$$

于上式代入 $u_h(x,0)$ 的表达式即得决定 $\mu_j(0)$ 的方程组

$$\sum_{i=1}^{N-1}\mu_i(0)\int_0^1 \varphi_i\varphi_j dx=\int_0^1 \psi\varphi_j dx \qquad (j=1,2,\cdots,N-1) \qquad (8.5.10)$$

解之即得 $\mu_j(0)$，从而得出初值 $u_h(0)=\sum\limits_{i=1}^{N-1}\mu_i(0)\varphi_i$.

记

$$u(t)=(\mu_1(t),\mu_2(t),\cdots\cdots,\mu_{N-1}(t))^T$$

$$f(t)=\left(\int_0^1 f\varphi_1 dx,\int_0^1 f\varphi_2 dx,\cdots\cdots,\int_0^1 f\varphi_{N-1}dx\right)^T$$

并用 K, M 表示 $(N-1)\times(N-1)$ 阶矩阵，其第 i 行第 j 列元素分别为

$$\int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx,\ \int_0^1 \varphi_i\varphi_j dx$$

显然 K、M 均是对称矩阵，而且它们还是正定的，即对任何 u，有

$$(ku,u)=\sum_{i,j=1}^{N-1}\left(\int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}\right)\mu_i\mu_j=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{N-1}\mu_i\varphi_i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=1}^{N-1}\mu_j\varphi_j\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)^2 dx>0$$

$$(Mu,u)=\sum_{i,j=1}^{N-1}\left(\int_0^1 \varphi_i\varphi_j dx\right)\mu_i\mu_j=\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{N-1}\mu_i\varphi_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N-1}\mu_j\varphi_j\right)dx$$

$$=\int_0^1 (u_h)^2 dx>0$$

利用矩阵 K, M, (8.5.9) 可以写成矩阵形式

$$M\frac{du}{dt}+Ku=f \qquad (8.5.11)$$

此时 (8.5.10) 亦可以写成矩阵形式

$$Mu^{(0)}=\psi \qquad (8.5.12)$$

其中 $u^{(0)}=u(0)$, $\psi=\left(\int_0^1 \psi\varphi_1 dx,\ \int_0^1 \psi\varphi_2 dx,\cdots,\int_0^1 \psi\varphi_{N-1}dx\right)^T$.

于是，有限元法把解热传导问题 (8.5.1)—(8.5.3) 转化为解常微分方程

组的初值问题(8.5.11)、(8.5.12)。(8.5.11)即为**有限元方程。**

容易计算出

$$
\begin{cases}
\int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_i}{dx}dx=\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}} \\
\int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_{i+1}}{dx}dx=-\frac{1}{h_{i+1}}, \quad \int_0^1 \frac{d\varphi_{i-1}}{dx}\frac{d\varphi_i}{dx}dx=-\frac{1}{h_i} \\
\int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx=0, \quad \text{当} |i-j|>1 \text{ 时} \\
\int_0^1 \varphi_i^2 dx=\frac{1}{3}(h_i+h_{i+1}) \\
\int_0^1 \varphi_i\varphi_{i-1}dx=\frac{1}{6}h_{i+1}, \quad \int_0^1 \varphi_i\varphi_{i-1}dx=\frac{1}{6}h_{i-1} \\
\int_0^1 \varphi_i\varphi_j dx=0, \text{当} |i-j|>1 \text{ 时}
\end{cases}
\tag{8.5.13}
$$

于是我们有

$$
K=\begin{bmatrix}
\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & & & \\
-\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3} & -\frac{1}{h_3} & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & & -\frac{1}{h_{N-1}} \\
& & & -\frac{1}{h_{N-1}} & \frac{1}{h_{N-1}}+\frac{1}{h_N}
\end{bmatrix}
\tag{8.5.14}
$$

$$
M=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}
2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\
h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & & h_{N-1} \\
& & & h_{N-1} & 2(h_{N-1}+h_N)
\end{bmatrix}
\tag{8.5.15}
$$

特殊情况时，当剖分是等距的，即 $h_i\equiv h=\frac{1}{N}$，则(8.5.14)，(8.5.15)中的 K, M:

$$
K=(2I-C)/h, \quad M=h(4I+C)/6 \tag{8.5.16}
$$

其中

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ & & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{8.5.17}$$

K 称为**刚度矩阵**. M 称为**质量矩阵**.

以下讨论用常微分方程近似解法求解(8.5.11), (8.5.12). 最简单的解法是采用向前差分法, 时间步长 Δt 取得适当小, 以保证解是稳定的. 通常则采用下述稳定且精确度较好的解法.

假定在 Δt 的时间间距内, $\frac{du}{dt}$的值随时间 t 线性变化, 积分后则有

$$\{u\}_t=\{u\}_{t-\Delta t}+\left(\left\{\frac{du}{dt}\right\}_t+\left\{\frac{du}{dt}\right\}_{t-\Delta t}\right)\frac{\Delta t}{2} \tag{8.5.18}$$

把此式改写成为

$$\left\{\frac{du}{dt}\right\}_t=-\left\{\frac{du}{dt}\right\}_{t-\Delta t}+(\{u\}_t-\{u\}_{t-\Delta t})\frac{2}{\Delta t} \tag{8.5.18$_1$}$$

并将(8.5.18$_1$)代入(8.5.11), 经整理后得出下面的递推公式

$$\left(K+\frac{2}{\Delta t}M\right)\{u\}_t=M\cdot\left(\frac{2}{\Delta t}\{u\}_{t-\Delta t}+\left\{\frac{du}{dt}\right\}_{t-\Delta t}\right)+f \tag{8.5.19}$$

从(8.5.19)式可知, 如果在时刻 $t-\Delta t$, $\{u\}$, $\left\{\frac{du}{dt}\right\}$是已知的. 则$\{u\}_t$可由线性方程组(8.5.19)解出. 对于第一层 $t=\Delta t$, 由初值条件(8.5.12)知$\{u\}_{t=0}$是已知的, 而$\left\{\frac{du}{dt}\right\}_{t=0}$的值也能根据(8.5.11), 即从

$$M\left\{\frac{du}{dt}\right\}_{t=0}=-K\{u\}_{t=0}+f \tag{8.5.20}$$

求解出来. 这样, 我们就可以逐层求得相应的$\{u\}_t$的值.

对于一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), & 0<x<1,\ 0<t\\ u(x,0)=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & 0<t\end{cases} \tag{8.5.21}$$

亦完全可以仿照前面的办法, 按有限元法对 x 变量离散化后, 从而得到一个二阶常微分方程组的初值问题:

$$
\begin{cases} M\dfrac{d^2u}{dt^2}+ku=f \\ Mu^{(0)}=\varphi,\quad M\left\{\dfrac{du}{dt}\right\}^{(0)}=\psi \end{cases} \tag{8.5.22}
$$

其中

$$
\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}=\left(\dfrac{d^2\mu_1}{dt^2},\ \dfrac{d^2\mu_2}{dt^2},\ \cdots,\ \dfrac{d^2\mu_{N-1}}{dt^2}\right)^T \\ \varphi=\left(\int_0^1\varphi\varphi_1dx,\ \int_0^1\varphi\varphi_2dx,\ \cdots,\ \int_0^1\varphi\varphi_{N-1}dx\right)^T \\ \psi=\left(\int_0^1\psi\varphi_1dx,\int_0^1\psi\varphi_2dx,\ \cdots,\ \int_0^1\psi\varphi_{N-1}dx\right)^T \end{cases} \tag{8.5.23}
$$

其余如前所述. 然后再用逐步积分法即可求得(8.5.22)的数值解.

§8-6 有限元法的特点

在这一节中，我们简略地把有限元法的特点与有限差分法作一对照和比较，概述如下

1 有限元法是以变分原理为基础. 它把问题转化为一个变分问题，即泛函求极值问题，再通过在有限单元剖分的基础上构造插值函数，离散化得到计算格式而求出解. 然而有限差分法要从物理模型列出相应的微分方程及定解条件，用差商代替微商进行离散化，得到差分方程而求出解. 把这两种方法比较之，有限元法可以直接从所考察的物理模型出发，利用变分原理，进行离散化处理列出计算格式，不必把问题归结为微分方程这一中间手续，其离散处理的方法往往具有明确的物理意义.

2 有限元法中，最终求解的是多元二次泛函的极值方程，即有限元方程. 因此它的系数矩阵总是对称的，对于正定的变分问题，有限元离散化后还保持了正定性，而在某些差分法中则不一定能达到. 有限元法的系数矩阵是稀疏的，差分法中也具有这一特性，这是二者的共同特性.

3 和有限差分法比较，有限元法由于结点配置的方式比较任意，因此，对于复杂形状的物体，可以使边界结点完全落在区域的

边界上，从而在边界上给出良好的逼近；对于由几种材料组合成的物体，也可以将一部分结点直接取在分界面上使能得到较好处理；同时还可以根据实际需要，在一部分求解区域中（例如温度梯度变化较大处）配置较密集的结点，而在另一部分求解区域中配置较稀疏的结点，使得在不过分增加计算工作量的前提下比较有效地提高计算的精确度．这些，对于采用直交网格的有限差分法均是难以实现的．

4　有限元法的各个环节，如区域的剖分，插值函数的产生，单元刚度分析，方程组的解算等等，在程序实现中都便于标准化．至少对于同一类型问题，不论几何形状和物理参数如何分布，以及不同的插值函数，都可用同一标准程序对付，只需准备最低限度的有关部分的几何及物理参数信息即可解题．这样可大大缩短解题的周期．

5　有限元法是用统一的观点对区域内结点和边界结点列计算格式．这就克服了有限差分法孤立地对微分方程及定解条件分别列差分格式的弊病，使各结点的精度在总体上比较协调一致．

6　在有限元法的执行过程中，勿论问题是简单还是复杂，基本上是同等对待的，即按照可以设想的最一般情况来处理．因此，对规则区域或常系数方程等较简单的问题，用有限元法的解题效率甚至会比有限差分法为低，这时用有限差分法求解是比较适宜的．但是，随着问题在几何上及物理上的复杂程度的增高，其优点就显现出来了．

最后还须指出，有些问题目前虽然还不能用有限元法求解，采用有限差分法仍然可以求得解答．

第八章　习　题

1　试建立拉普拉斯方程第一边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & 0<x,y<\pi \\ u|_{x=0}=u|_{x=\pi}=u|_{y=0}=0, & 0\leqslant x,y\leqslant\pi \\ u|_{y=\pi}=\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi \end{cases}$$

的有限元方程，取 $h=\dfrac{\pi}{10}$，并且计算出有限元近似解。

2　试建立泊松方程第三边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), & (x,y)\in\Omega \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]\bigg|_{\Gamma}=\nu \end{cases}$$

等价的变分问题：$u\in M$，使得

$$F[u]=\iint\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+fu\right]dxdy+\int_{\Gamma}\left[\frac{1}{2}\sigma u^2-\nu u\right]ds$$
$$=\min$$

3*　试建立一维热传导方程的混合问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<1,\quad 0<t \\ u(x,0)=x(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & 0\leqslant t \end{cases}$$

的有限元方程，取 $h=\dfrac{1}{10}$，$\Delta t=\dfrac{1}{600}$，并且计算出有限元数值近似解。

4*　试建立双重调和方程边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}=f(x,y), & (x,y)\in\Omega \\ u|_{\Gamma}=\dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0 \end{cases}$$

等价的变分问题：$u\in H_0^2(\Omega)$，使得

$$F[u]=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy-\int_{\Gamma}fu\,ds$$
$$=\min$$

其中 H_0^2 表示函数本身及其一、二阶导数都平方可积，且满足条件

$$u|_{\Gamma}=\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0.$$

第九章　二阶线性偏微分方程的分类标准形式

第一章里推导出了三种形式的二阶偏微分方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

$$u_t-a^2u_{xx}=0$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad 或 \quad u_{xx}+u_{yy}=p(x,y)$$

前两种方程的物理过程都由两个因素——点的位置和时间来确定的，第三种方程所描述的物理过程是与时间无关的，仅仅取决定于点的位置．若将上述方程中自变量都换成 x、y，则得出

$$u_{xx}-a^2u_{yy}=0 \tag{I}$$

$$u_x-a^2u_{yy}=0 \tag{II}$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad 或 \quad u_{xx}+u_{yy}=p(x,y) \tag{III}$$

由此我们看出上述方程(I)、(II)、(III)都具有特点：(1)是二阶偏微分方程，(2)(I)，(III)都含有对 x, y 的二阶偏导数，而(II)中只含有对 y 的二阶偏导数，(3)项 u_{yy} 前面的正负号是不同的．(I)、(II)、(III)表出了三类方程的形式，代表着二阶偏微分方程的三种不同类型．为此，我们讨论普遍的二阶线性偏微分方程：

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}-Du_x+Eu_y+Fu+G=0$$

说明二阶偏微分方程分类的依据，以及化简的方法．这里 A，B，C，D，E，F，G 都是 x，y 的已知函数．

§9–1　二阶线性偏微分方程的分类

1　特征方程、特征线

设有二阶线性偏微分方程

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu+G=0 \tag{9.1.1}$$

其中 A, B, C, D, E, F, G 都是 x, y 的已知函数．作可逆的变量变换

$$\xi=\xi(x, y), \quad \eta=\eta(x, y) \tag{9.1.2}$$

因而 $u(x, y)$ 变成为 $u(\xi, \eta)$．计算偏导数

$$\begin{cases} u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x,\ u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y \\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx} \\ u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy} \\ u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy} \end{cases} \tag{9.1.3}$$

如将这些表达式代入(9.1.1)中，则得出二阶偏微分方程

$$\bar{A}u_{\xi\xi}+2\bar{B}u_{\xi\eta}+\bar{C}u_{\eta\eta}+\bar{D}u_\xi+\bar{E}u_\eta+\bar{F}u+\bar{G}=0 \tag{9.1.4}$$

仍然是线性的，其中

$$\begin{cases} \bar{A}=A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2 \\ \bar{B}=A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+C\xi_y\eta_y \\ \bar{C}=A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2 \\ \bar{D}=A\xi_{xx}+2B\xi_{xy}+C\xi_{yy}+D\xi_x+E\xi_y \\ \bar{E}=A\eta_{xx}+2B\eta_{xy}+C\eta_{yy}+D\eta_x+E\eta_y \\ \bar{F}=F,\ \bar{G}=G \end{cases} \tag{9.1.5}$$

从已得出的(9.1.5)可以看出，只要 $\varphi(x, y)$（或 $\psi(x, y)$）是一阶偏微分方程

$$AZ_x^2+2BZ_xZ_y+CZ_y^2=0 \tag{9.1.6}$$

的特解($\varphi(x, y)$与 $\psi(x, y)$是线性无关的特解)，则方程(9.1.4)就变得简单多了．因此，简化方程(9.1.1)与求解方程(9.1.6)有密切关系．同时，我们容易验证：如果 $\varphi(x, y)=c$（或 $\psi(x, y)=c$）是常微分方程

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0 \tag{9.1.7}$$

的一般积分，则 $Z=\varphi(x, y)$（或 $Z=\psi(x, y)$）就必然是(9.1.6)的特解．反之亦然．事实上，从 $\varphi(x, y)=c$ 可知 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$，把它代

入(9.1.7)后，就得出

$$A\left(\frac{\varphi_x^2}{\varphi_y^2}\right)-2B\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+C=\frac{A\varphi_x^2+2B\varphi_x\varphi_y+C\varphi_y^2}{\varphi_y^2}=0$$

亦即 $A\varphi_x^2+2B\varphi_x\varphi_y+C\varphi_y^2=0$，故得证明．反之，很显然成立．

在此，我们称常微分方程(9.1.7)为(9.1.1)的**特征方程**，其一般积分称为(9.1.1)的**特征线**．

2　方程分类

现在我们把特征方程(9.1.7)分解为两个方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A} \tag{9.1.8}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A} \tag{9.1.9}$$

此处根号内的式子的符号可用来确定方程(9.1.1)的类型，其方法如下：若在 M 点处，$B^2-AC>0$，此时有两族互异实的特征线，那末称方程(9.1.1)属于**双曲型**；若在 M 点处，$B^2-AC<0$，此时我们说有两族互异虚的特征线，那末称方程(9.1.1)属于**椭圆型**；若在 M 点处，$B^2-AC=0$，此时有两族彼此相重合的特征线，那末称方程(9.1.1)属于**抛物型**．

另外，从关系式

$$\overline{B}^2-\overline{A}\overline{C}=(B^2-AC)(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x)^2 \tag{9.1.10}$$

可知，方程的类型在可逆的变量变换之下是不变的．

需要注意，上述分类是针对区域中的每一个点而论的，因此，就整个区域中的点而言，方程可能是属于同一类型，也可能是不属于同一类型．

例 1　偏微分方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0\ \ (a>0) \tag{9.1.11}$$

$$u_t-a^2u_{xx}=0\ \ (a>0) \tag{9.1.12}$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad 或 \quad u_{xx}+u_{yy}=p(x,y) \tag{9.1.13}$$

按分类的定义，显然，方程(9.1.11)属于双曲型，方程(9.1.12)属于抛物型，方程(9.1.13)属于椭圆型.

例 2 偏微分方程

$$yu_{xx}+u_{yy}=0 \tag{9.1.14}$$

容易看出，在 $y>0$ 的区域内，它是属于椭圆型；在 $y<0$ 的区域内，它是属于双曲型；在 $y=0$ 的直线上，它是属于抛物型. 因此，在包含直线 $y=0$ 为其内部的任何区域上，它都属于三种类型，故称它为混合型.

§9-2 二阶线性偏微分方程化为标准形式

设在所研究的区域上，方程(9.1.11)是属于同一类型的. 现在按照方程的类型来讨论化简问题.

1 双曲型方程，即 $B^2-AC>0$

此时常微分方程(9.1.8)，(9.1.9)右端是两个相异的实值函数，从而有两族线性无关的实特征线 $\varphi(x,y)=c$ 与 $\psi(x,y)=c$. 令

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y) \tag{9.2.1}$$

因而 $\bar{A}=0$, $\bar{C}=0$，此时方程(9.1.1)变成为

$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2\bar{B}}[\bar{D}u_\xi+\bar{E}u_\eta+\bar{F}u+\bar{G}]=0 \tag{9.2.2}$$

其中 $\bar{B}$, $\bar{D}$, $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ 如(9.1.5)中所示之.

例如，弦振动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$，它的特征方程

$$\frac{dx}{dt}=a,\qquad \frac{dx}{dt}=-a$$

其一般积分分别为 $x=at+c_1$, $x=-at+c_2$. 因而特征线为

$$\varphi(x,t)=x-at=c_1,\quad \psi(x,t)=x+at=c_2$$

令

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

以此代入弦振动方程后，则得出

$$u_{\xi\eta} = 0$$

让我们回忆§4-1中解弦振动方程(4.1.1)的初始值问题，如把那时化简弦振动方程的方法与刚才讨论过的比较一下，便可看出，那时所作的替换(4.1.3)正好就是沿弦振动方程的两族线性无关的特征线 $x - at = c_1$ 与 $x + at = c_2$ 所作的替换：

$$\xi = x - at, \eta = x + at$$

从而才把弦振动方程化简得既简单又容易求出解来．这种沿特征线族作替换化简微分方程的方法恰好是§4-1中作替换(4.1.3)的理论根据所在．

(9.2.2)式是双曲型方程的**第一种标准形式**．如令

$$\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta \tag{9.2.3}$$

这里 α, β 是引入的新变量，于是有

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \; u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \; u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$

以此式代入(9.2.2)式，得出

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} - \left[\frac{\overline{D} + \overline{E}}{\overline{B}} u_\alpha + \frac{\overline{D} - \overline{E}}{\overline{B}} u_\beta + \frac{2\overline{F}}{\overline{B}} u + \frac{2\overline{G}}{\overline{B}}\right] = 0 \tag{9.2.4}$$

(9.2.4)式是双曲型方程的**第二种标准形式**．

如方程(9.2.2)中系数皆为常数，对方程(9.2.2)另引入变量变换

$$u(\xi, \eta) = \omega(\xi, \eta) e^{-\frac{\overline{E}}{2\overline{B}}\xi - \frac{\overline{D}}{2\overline{B}}\eta} \tag{9.2.5}$$

由于

$$
\begin{cases}
u_\xi = \omega_\xi \cdot e^{-\frac{\bar{E}}{2\bar{B}}\xi - \frac{\bar{D}}{2\bar{B}}\eta} - \dfrac{\bar{E}}{2\bar{B}}\omega e^{-\frac{\bar{E}}{2\bar{B}}\xi - \frac{\bar{D}}{2\bar{B}}\eta}, \\
u_\eta = \left(\omega_\eta - \dfrac{\bar{D}}{2\bar{B}}\omega\right) e^{-\frac{\bar{E}}{2\bar{B}}\xi - \frac{\bar{D}}{2\bar{B}}\eta} \\
u_{\xi\eta} = \left(\omega_{\xi\eta} - \dfrac{\bar{D}}{2\bar{B}}\omega_\xi - \dfrac{\bar{E}}{2\bar{B}}\omega_\eta + \dfrac{\bar{E}}{2\bar{B}} \dfrac{\bar{D}}{2\bar{B}}\omega\right) e^{-\frac{\bar{E}}{2\bar{B}}\xi - \frac{\bar{D}}{2\bar{B}}\eta}
\end{cases}
\tag{9.2.6}
$$

将(9.2.5),(9.2.6)代入方程(9.2.2)式,则得出

$$
\omega_{\xi\eta} + \left(\frac{\bar{F}}{2\bar{B}} - \frac{\bar{E}\bar{D}}{4\bar{B}^2}\right)\omega + \frac{\bar{G}}{2\bar{B}} e^{\frac{\bar{E}}{2\bar{B}}\xi + \frac{\bar{D}}{2\bar{B}}\eta} = 0 \tag{9.2.7}
$$

2 抛物型方程,即 $B^2 - AC = 0$

此时常微分方程(9.1.8),(9.1.9)重合为

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{C}{A}}
$$

故特征方程只有一族特征线 $\varphi(x, y) = c$. 令

$$
\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{9.2.8}
$$

其中 $\psi(x, y)$ 是与 $\varphi(x, y)$ 线性无关的任意函数. 因而便有

$$
\bar{A} = 0, \quad \bar{B} = 0
$$

这里已应用条件 $B = \sqrt{AC}$. 因此, 方程(9.1.1)化成为抛物型的标准形式

$$
u_{\eta\eta} + \frac{1}{\bar{C}}[\bar{D}u_\xi + \bar{E}u_\eta + \bar{F}u + \bar{G}] = 0 \tag{9.2.9}
$$

3 椭圆型方程,即 $B^2 - AC < 0$

此时方程(9.1.8)与(9.1.9)右端都是复数. 如果 $\varphi(x, y) = c$ 是(9.1.8)的复数解, 则其共轭函数 $\varphi^*(x, y) = c$ 亦必为 (9.1.9) 的复数解, 此时 $\varphi(x, y) = c$ 与 $\varphi^*(x, y) = c$ 是两族线性无关的虚特征线. 令

$$
\xi = \varphi(x, y), \eta = \varphi^*(x, y) \tag{9.2.10}
$$

因而 $A=0, \bar{C}=0$，从而方程(9.1.1)化成为

$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2\bar{B}}[\bar{D}u_\xi+\bar{E}u_\eta+\bar{F}u+\bar{G}]=0 \tag{9.2.11}$$

这里，$\xi\eta$ 是复变(函)数，所以方程(9.2.11)不同于(9.2.2)。

方程(9.2.11)是复变数的偏微分方程，使用起来是不方便的，故我们引入新的变量

$$\alpha=\frac{\varphi+\varphi^*}{2}, \quad \beta=\frac{\varphi-\varphi^*}{2i} \tag{9.2.12}$$

立刻得到 $\bar{A}=\bar{C}, \bar{B}=0$，故方程(9.2.11)化成为

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}+\frac{1}{\bar{A}}[(\bar{D}+\bar{E})u_\alpha+i(\bar{E}-\bar{D})u_\beta+2\bar{F}u+2\bar{G}]=0$$

(9.2.13)

这样的方程便是椭圆型方程的标准形式。

如方程(9.2.13)中系数皆为常数，对它再引入变量变换

$$u(\alpha,\beta)=\omega(\alpha,\beta)e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\bar{D}+\bar{E}}{\bar{A}}\right)\alpha+i\left(\frac{\bar{E}-\bar{D}}{\bar{A}}\right)\beta\right]} \tag{9.2.14}$$

由于

$$\begin{cases} u_\alpha=\left(\omega_\alpha-\frac{1}{2}\frac{\bar{D}+\bar{E}}{\bar{A}}\omega\right)e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\bar{D}+\bar{E}}{\bar{A}}\right)\alpha+i\left(\frac{\bar{E}-\bar{D}}{\bar{A}}\right)\beta\right]} \\ u_\beta=\left(\omega_\beta-\frac{i}{2}\frac{\bar{E}-\bar{D}}{\bar{A}}\omega\right)e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\bar{D}+\bar{E}}{\bar{A}}\right)\alpha+i\left(\frac{\bar{E}-\bar{D}}{\bar{A}}\right)\beta\right]} \\ u_{\alpha\alpha}=\left(\omega_{\alpha\alpha}-\frac{\bar{E}+\bar{D}}{\bar{A}}\omega_\alpha+\frac{(\bar{E}+\bar{D})^2}{4\bar{A}^2}\omega\right)e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\bar{D}+\bar{E}}{\bar{A}}\right)\alpha+i\left(\frac{\bar{E}-\bar{D}}{\bar{A}}\right)\beta\right]} \\ u_{\beta\beta}=\left(\omega_{\beta\beta}-i\frac{\bar{E}-\bar{D}}{\bar{A}}\omega_\beta-\frac{(\bar{E}-\bar{D})^2}{4\bar{A}^2}\omega\right)e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\bar{D}+\bar{E}}{\bar{A}}\right)\alpha+i\left(\frac{\bar{E}-\bar{D}}{\bar{A}}\right)\beta\right]} \end{cases}$$

(9.2.15)

把它们代入方程(9.2.13)中，整理后得出

$$\omega_{\alpha\alpha}+\omega_{\beta\beta}+\left(\frac{2\bar{F}}{\bar{A}}-\frac{(\bar{D}+\bar{E})^2}{4\bar{A}^2}+\frac{(\bar{E}-\bar{D})^2}{4\bar{A}^2}\right)\omega$$

$$+\frac{2\overline{G}}{\overline{A}}e^{\frac{1}{2}\left[\frac{\overline{E}+\overline{D}}{\overline{A}}\alpha+i\frac{\overline{E}-\overline{D}}{A}\beta\right]}=0 \qquad (9.2.16)$$

显然，方程(9.2.16)比(9.2.11)与(9.2.13)要简单.

总之，当已知一个二阶线性偏微分方程之后，以判别式 B^2-AC 的符号可判断出方程或是双曲型，或是抛物型，或是椭圆型，然后分别把它们化成为标准形式. 由于标准形式方程要比原来方程简单得多，讨论起来就会方便些. 因此，很自然我们不去讨论一般二阶线性偏微分方程，只去讨论它的标准形式方程.

例 1 将方程 $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$ 化为标准形式.

解 $A=1, B=2, C=5, B^2-AC=4-5=-1<0$，方程为椭圆型. 特征方程为 $dy^2-4dx\,dy+5dx^2=0$，即 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4\left(\frac{dy}{dx}\right)+5=0$，从而

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\pm\sqrt{4-1\cdot5}}{1}=2\pm i$$

虚特征线为 $y-(2+i)x=c, y-(2-i)x=c$. 作变换

$$\xi=y-2x,\quad \eta=x$$

从而 $u(x,y)$ 转化为 $u(\xi,\eta)$. 利用复合函数求导法，得出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$$

将上述求导结果代入原方程，得出

$$\left(4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+4\left(-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)$$
$$+5\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+2\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

整理后得出椭圆型方程标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

例 2 将方程 $u_{xx}+yu_{yy}=0$ 化为标准形式

解 $A=1, B=0, C=y, B^2-AC=-y$.

(1) $y>0$, 方程为椭圆型. 特征方程 $dy^2+ydx^2=0$, 即$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-y$, 从而

$$\frac{dy}{dx}=+i\sqrt{y}, \qquad \frac{dy}{dx}=-i\sqrt{y}$$

虚特征线为 $2\sqrt{y}+ix=c$, $2\sqrt{y}-ix=c$. 作变换

$$\xi=2\sqrt{y}, \quad \eta=x$$

从而 $u(x,y)$转化为 $u(\xi,\eta)$. 利用复合函数求导法, 得出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{2}{\xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{4}{\xi^2}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{4}{\xi^3}$$

将上述求导结果代入原方程, 得出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\xi^2}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{4}{\xi^2}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{4}{\xi^3}\right)=0$$

整理后得出椭圆型方程标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

(2) $y=0$, 方程为抛物型. 方程标准形式为$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.

(3) $y<0$, 方程为双曲型. 特征方程 $dy^2+ydx^2=0$, 即$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-y$, 从而

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{-y}, \quad \frac{dy}{dx}=-\sqrt{-y}$$

特征线为 $2\sqrt{-y}-x=c$, $2\sqrt{-y}+x=c$. 作变换

$$\xi=x-2\sqrt{-y}, \quad \eta=x+2\sqrt{-y}$$

从而 $u(x,y)$ 转化为 $u(\xi,\eta)$. 利用复合函数求导法,得出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2y\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{2y\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

将上求导结果代入原方程,得出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+y\left(-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2y\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{2y\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0$$

整理后得出双曲型方程第一种标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{2(\eta-\xi)}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{2(\eta-\xi)}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

再令(9.2.3)式变换:

$$\xi=\alpha+\beta,\quad \eta=\alpha-\beta$$

将已导出的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}-\frac{\partial u}{\partial \beta}\right),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)$$

代入双曲型方程第一种标准形式

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)+\frac{1}{4(-\beta)}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)-\frac{1}{4(-\beta)}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}-\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)$$
$$=0$$

整理后得出双曲型方程第二种标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}-\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial \beta}=0$$

第九章　习　题

1　试确定下列的方程中,何者为双曲型,何者为抛物型,何者为椭圆型.

(1) $u_{xx}+u_{xy}+u_{yy}=0$ (2) $3u_{xx}+2u_{xy}+7u_{yy}=0$

(3) $4u_{xx}-7u_{xy}+3u_{yy}=0$ (4) $4u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}=0$

(5) $a^2u_{xx}+2au_{xy}+u_{yy}=0$

2 在下面方程中，x 与 y 取什么值时，方程为椭圆型，抛物型，或者双曲型.

(1) $xu_{xx}+xu_{xy}+yu_{yy}=0$ (2) $u_{xx}-4u_{yy}+x^2u_x+y^2u_y-3xyu=0$

(3) $u_{xx}+xyu_{yy}=0$ (4) $yu_{xx}-xu_{yy}+u_x+yu_y=0$

(5) $u_{xx}+(x+y)^2u_{yy}=0$ (6) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$

(7) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$

3 试将下列方程化为标准形式.

(1) $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$

(2) $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$

(3) $yu_{xx}+u_{yy}=0$

(4) $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y=0$

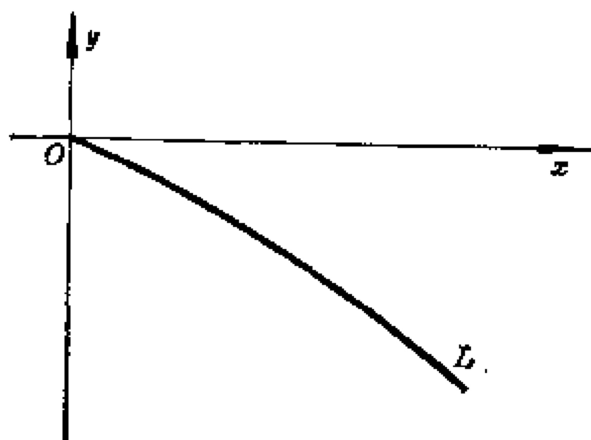
(5) $u_{xx}-2\cos x\cdot u_{xy}-(3+\sin^2x)u_{yy}-yu_y=0$

(6) $(\mathrm{tg}^2x)u_{xx}-(2y\,\mathrm{tg}x)u_{xy}+y^2u_{yy}+(\mathrm{tg}^3x)u_x=0$

4* 试求方程

$$u_{xx}+yu_{yy}+\frac{1}{2}u_y=0 \qquad (y<0)$$

的解. 假定它的数值在正半轴 Ox 以及特征线 $L: x-2\sqrt{-y}=0$（如图）上是已知的：$u(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_1(x)$，$u(x,y)\big|_{L}=\varphi_2(x)$，而且 $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$.



第 4 题图

习 题 答 案

第一章 答 案

4 边界条件：$u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=l}=0$，初始条件：$u\Big|_{t=0}=0$，

$\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=V_0\sin\dfrac{\pi x}{l}$.

5 边界条件：$u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=l}=0$， 初始条件：

$$u\Big|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{h}{b}x & ,0\leqslant x\leqslant b\\ h\dfrac{x-b}{b-l}+h, & b<x\leqslant l\end{cases},\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=V_0.$$

6 定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{A}{\rho}\cos\omega t, & 0<x<l,0<t\\ u\Big|_{t=0}=A-\dfrac{4A}{l^2}\left(x-\dfrac{l}{2}\right)^2, & \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=V_0\sin\dfrac{\pi x}{l}\\ u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=l}=0\end{cases}$$

7 定解条件：$u\Big|_{x=0}=kt$， $u\Big|_{x=l}=0$， $u\Big|_{t=0}=0$.

8 方程：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$， 定解条件：$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=-\dfrac{Q_0}{k}$， $u\Big|_{t=0}=0$，
$0<x<\infty,0<t$.

9 边界条件：$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0$， 初始条件：$u\Big|_{t=0}=\varphi(x)$.

10 热传导方程：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+ke^{-\alpha x}$，$k<0$.

11 边界条件：$\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\mp hu\right]\Big|_{x=0,a}=0$，$\left[\dfrac{\partial u}{\partial y}\mp ku\right]\Big|_{y=0,a}=0$，
初始条件：$u\Big|_{t=0}=xy(x-a)(y-a)$， $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$. h、k 为常数.

12 边界条件：$u(0,y)=u(a,y)=u(x,b)=0$，

$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{4k}{a}x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{a}{4}\\ k, & \dfrac{a}{4}<x\leqslant\dfrac{3}{4}a\\ 4k-\dfrac{4k}{a}x, & \dfrac{3a}{4}<x\leqslant a\end{cases}$$

方程：$u_{xx}+u_{yy}=0$ 或 $u_{xx}+u_{yy}=g(x,y)$。

13 设温度为 $u(r,t)$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$。将热传导方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$转换为柱坐标 r,θ 下的方程$\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)$。因为 u 与 θ 无关，所以温度分布 $u(r,t)$ 必满足方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$。

第二章 答 案

1 (1) $u(x,t)=\dfrac{8l^3}{a\pi^4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}\sin\dfrac{(2n-1)\pi at}{l}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$

(2) $u(x,t)=\dfrac{-4l^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}\cos\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi at}{l}\cdot\sin\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$

(3) $u(x,t)=\cos\dfrac{3\pi at}{l}\sin\dfrac{3\pi x}{l}$

$$+\frac{8l^3}{a\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\sin\frac{(2n-1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}$$

2 $u(x,t)=\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi\cdot 50\cdot t\right.$

$$\left.-\frac{2}{(2n-1)^4\pi^2 50}\sin(2n-1)\pi\cdot 50\cdot t\right\}\cdot\sin(2n-1)\pi x$$

3 $u(x,t)=\dfrac{8hl}{a\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\sin\dfrac{(2n+1)\pi at}{l}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}$

4 定解条件：$u(0,t)=u(l,t)=0$，

$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x, & 0<x<l/2\\[2mm] \dfrac{2h}{l}(l-x), & l/2<x<l,\end{cases}$$

$$u_t(x,0)=\begin{cases}\dfrac{4hx}{l}, & 0<x<l/4\\[2mm] h, & l/4<x<3l/4\\[2mm] \dfrac{4h}{l}(l-x), & 3l/4<x<l\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中 $$a_n=\frac{4h}{l^2}\left[\frac{2l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]=\begin{cases}0, & n=2k\\[2mm] \dfrac{8h(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases}\quad k=0,1,2,\cdots.$$

$$b_n=\frac{8hl}{a(n\pi)^3}\left[1+(-1)^{n-1}\right]\sin\frac{n\pi}{4}=\frac{8\sqrt{2}hl}{a\pi^3(2k+1)^3}(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}$$

$$n=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots$$

5 (1) $$u(x,t)=\frac{2}{a\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\{[2-(n\pi)^2](-1)^n-2\}\sin n\pi at\sin n\pi x$$

(2) $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n]\cos n\pi at+\right.$$
$$\left.+\frac{18}{(n\pi)^2a}[1-(-1)^n]\sin n\pi at\right\}\sin n\pi x$$

(3) $$u(x,t)=\cos at\sin x+\frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left\{2[(-1)^n-1]\right.$$
$$\left.+(-1)^{n+1}(n\pi)^2\right\}\sin nat\sin nx$$

(4) $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2\left(\pi^2-\frac{8}{(2n-1)^2}\right)\cdot$$
$$\cdot(-1)^{n-1}\cos\frac{(2n-1)at}{2}\sin\frac{(2n-1)x}{2}$$

6 (1) $$u(x,t)=\frac{2bl^2\operatorname{sh}l}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(l^2+n^2\pi^2)}\left(1-\cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

(2) $u(x,t)=\frac{2gl^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}\left(1-\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t\right)\cdot$

$\cdot\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$

(3) $u(x,t)=V(x,t)+W(x)$. 其中 $W(x)=B(x-l)+c$,

$$V(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi at}{l}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}+\frac{l^2}{a^2\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left[1-\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi at}{l}\right]\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l(-W(x))\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}dx,$$

$$f_n=\frac{2}{l}\int_0^l A\sin x\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}dx$$

(4) $u(x,t)=\frac{l^2}{\pi^2a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}f_n\left(1-\cos\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}$, 其中

$f_n=\frac{2}{l}\int_0^l\ln(1+x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n=0,1,2,\cdots.$

7 $u(x,t)=V(x,t)+W(x,t)$. 其中 $W(x,t)=\frac{Ax}{l}\sin\omega t$,

$$V(x,t)=\frac{2\omega Al}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$+\frac{2\omega^2Al}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cdot\left(\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\right)}\left[\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t\right.$$

$$\left.-\omega\sin\frac{n\pi at}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

8 (1) $u(x,t)=V(x,t)+W(x)$, 其中

$$V(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A\mathrm{sh}\,l}{a^2}\frac{n\pi(-1)^{n+1}}{l^2+(n\pi)^2}+\frac{\left(k+\frac{A}{a^2}\mathrm{sh}\,l\right)(-1)^n-h}{n\pi}\right].$$

$$\cdot \cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

(2) $u(x,t)=\dfrac{A}{6a^2}x\cdot(1-x^2)+\dfrac{2A}{a^2\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}\cos n\pi at\sin n\pi x$

(3) $u(x,t)=x+\dfrac{1}{a^2\pi^2}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}f_n\cdot(\cos n\pi at-1)\sin n\pi x$,

$$f_n=\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n+\frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\right]$$

9 $u(x,t)=\dfrac{8l^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^3}e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi a}{l}\right]^2\cdot t}\cdot\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$

10 $u(x,t)=\dfrac{l}{2}-\dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi a}{l}\right]^2\cdot t}\cdot\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$

11 $u(x,t)=\dfrac{2H}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left[(-1)^{n+1}+\cos\dfrac{n\pi}{2}\right]e^{-\left[\frac{n\pi a}{l}\right]^2\cdot t}\cdot\sin\dfrac{n\pi x}{l}$

12 $u(x,t)=V(x,t)+W(x,t)$，其中 $W(x,t)=[\mu_2(t)-\mu_1(t)]\dfrac{x}{l}+\mu_1(t)$，$V(x,t)$ 为下述定解问题的解：

$$\begin{cases} V_t=a^2V_{xx}+f(x,t), & f(x,t)=-[\mu_2'(t)-\mu_1'(t)]\dfrac{x}{l}-\mu_1'(t) \\ V(x,0)=\phi(x), & \phi(x)=\varphi(x)-W(x,0) \\ V(0,t)=V(l,t)=0 \end{cases}$$

13 (1) $u(x,t)=\dfrac{4}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}[2(-1)^{n+1}-1]e^{-4n^2\pi^2t}\sin n\pi x$

(2) $u(x,t)=\sum\limits_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}[(-1)^n-1]\left[\dfrac{n}{n^2-4\pi}-\dfrac{1}{n\pi}\right]e^{-n^2kt}\cdot\sin nx$

14 (1) $u(x,t)=\dfrac{2Al^2}{\pi a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^{n+1}e^{-\alpha l}}{n(\alpha^2l^2+n^2\pi^2)}\left[1-e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t}\right]\sin\dfrac{n\pi x}{l}$

$$+\frac{4T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi a}{l}\right)^2\cdot t}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}$$

(2) $u(x,t)=V(x,t)+W(x)$.

其中 $W(x)=\dfrac{A}{a^2\alpha^2}\left[1-e^{-\alpha x}\dfrac{x}{\pi}(e^{-\alpha\pi}-1)\right]$,

$V(x,t)=e^{-a^2t}\sin x$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2A}{\pi a^2\alpha^2}\frac{(-1)^n-1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}(e^{-\alpha\pi}-1)\right.$$

$$\left.+\frac{n}{n^2+\alpha^2}\left[1-(-1)^n e^{-\alpha\pi}\right]\right\}e^{-n^2a^2t}\sin nx$$

15 提示：引用替换 $u(x,t)=e^{-kt}V(x,t)$.

16 $u(x,t)=V(x,t)+W(x)$. 其中 $W(x)=(u_2-u_1)\dfrac{x}{l}+u_1$, 而$V(x,t)$为下述定解问题的解：

$$\begin{cases}V_t=a^2V_{xx}+f(x,t)\\ V(x,0)=g(x)-W(x)\\ V(0,t)=V(l,t)=0\end{cases}$$

若 $g(x)$, u_1, u_2 都取零时，解是原问题的解的特例.

17 $u(x,t)=V(x,t)+W(x,t)$. 其中

$W(x,t)=[\mu_2(t)-\mu_1(t)]\dfrac{x}{l}+\mu_1(t)$, 而 $V(x,t)$为下述定解问题的解：

$$\begin{cases}V_t=a^2V_{xx}+\bar{f}(x,t), & \bar{f}(x,t)=f(x,t)-W_t(x,t)\\ V(x,0)=\bar{\varphi}(x), & \bar{\varphi}(x)=\varphi(x)-W(x,0)\\ V(0,t)=V(l,t)=0\end{cases}$$

18 $$u(x,t)=\frac{8\sqrt{2}h}{\pi^2}\left[e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{9}e^{-\frac{9a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{3\pi x}{l}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{25}e^{-\frac{25a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{5\pi x}{l}-\frac{1}{49}e^{-\frac{49a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{7\pi x}{l}+\cdots\right]$$

19 $$u(x,t)=10-\frac{5x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(5-kl)-10}{n}e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

20

(1) $$u(x,y)=\frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\frac{\operatorname{sh}(2k-1)\pi\frac{a-x}{b}}{\operatorname{sh}(2k-1)\pi\frac{a}{b}}\sin\frac{(2k-1)\pi y}{b}$$

$$+B\frac{\operatorname{sh}\pi\frac{b-y}{a}}{\operatorname{sh}\pi\frac{b}{a}}\sin\frac{\pi}{a}x$$

(2) $$u(x,y)=\frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\frac{\operatorname{sh}(2k-1)\pi\frac{a-x}{b}}{\operatorname{sh}(2k-1)\pi\frac{a}{b}}\sin\frac{(2k-1)\pi y}{b}$$

$$+\frac{8B}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\frac{\operatorname{sh}k\pi\frac{b-y}{a}}{\operatorname{sh}k\pi\frac{b}{a}}\sin\frac{k\pi x}{a}$$

(3) $$u(x,y)=\frac{Abx}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Ab((-1)^n-1)}{n^2\pi^2\operatorname{sh}\frac{an\pi}{b}}\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

21　定解问题为

$$\begin{cases}\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0\\ u(0,y)=u(a,y)=0\\ u(x,b)=0,\ u(x,0)=f_1(x)=\begin{cases}\frac{4hx}{a}, & 0<x<a/4\\ h, & a/4<x<3a/4\\ \frac{4h}{a}(a-x), & 3a/4<x<a\end{cases}\end{cases}$$

其解法同第 20 题.

22　定解问题为

$$\begin{cases}\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0\\ u_x(0,y)=u_x(a,y)=0\\ u(x,0)=T,\quad u(x,b)=0\end{cases}$$

其解 $u(x,y)=T\left(1-\frac{1}{b}y\right)$.

23　定解问题为

$$\begin{cases}\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0, & \rho>a\\ u(a,\theta)=f(\theta) & (-\pi<\theta<\pi),\ f(-\pi)=f(\pi)\\ \lim\limits_{(\rho,\theta)\to\infty}u(\rho,\theta)\text{有限值}\end{cases}$$

其解为

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\varphi)\frac{\rho^2-a^2}{\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\varphi)+a^2}d\varphi$$

24　(1) $u(\rho,\theta)=\frac{1}{a}A\rho\cos\theta$,　　(2) $u(\rho,\theta)=A+\frac{1}{a}B\rho\sin\theta$.

25　$u(\rho,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rho^{\frac{n\pi}{a}}\sin\frac{n\pi\theta}{a}$,　$a_n=\frac{2}{a a^{n\pi/a}}\int_0^a f(\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{a}d\theta$

26　$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\rho^n$, a_0 是任意常数

$$a_n=\frac{1}{n\pi a^{n-1}}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos n\theta d\theta,\qquad b_n=\frac{1}{n\pi a^{n-1}}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin n\theta d\theta,$$

27　定解问题为　$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$

$$u(a,\theta)=\begin{cases}0, & -\pi<\theta<0\\ V_0, & 0<\theta<\pi\end{cases}.$$

其解为

$$u(\rho,\theta)=V_0\cdot\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\pi}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\sin(2n-1)\theta\right\}$$

28　定解问题为

$$\begin{cases}\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0, & \text{在环域内}\\ u\Big|_{\rho=R_1}=f_1(\theta),\quad u\Big|_{\rho=R_2}=f_2(\theta),\ (-\pi<\theta<\pi)\end{cases}$$

当 $R_1\to0$ 时，变为圆域上的定解问题.

29　定解问题为

$$\begin{cases}\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0, & \text{在圆域内}\\ \frac{\partial u}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R_1}=f_1(\theta),\ u\Big|_{\rho=R_2}=f_2(\theta)\end{cases}$$

30　$u(x,y)=V(x,y)+W(x,y)$. 其中 $V(x,y)=x(a-x)$，而 $W(x,y)$:

$$W(x,y)=-\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}\frac{(2n+1)\pi y}{a}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}}{(2n+1)^3\mathrm{ch}\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}$$

31　$u(x,y)=-\frac{1}{12}xy(x^2+y^2-R^2)$. 或

$$u(\rho,\theta)=-\frac{1}{24}\rho^4\sin2\theta+\frac{R^4}{48\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin2\varphi\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}d\varphi$$

32* 定解问题为:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right)\\ u(\rho,0)=A\left(1-\dfrac{\rho^2}{R^2}\right),\quad \dfrac{\partial u(\rho,0)}{\partial t}=0,\quad (A\text{ 为常数})\\ u(0,t)\text{ 是有限量},\quad u(R,t)=0\end{cases}$$

$$u(\rho,t)=8A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\lambda_n\frac{\rho}{R}\right)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}\cos\frac{a\lambda_n t}{R},\quad \lambda_1\lambda_2\cdots\text{是 } J_0(\lambda)=0\text{ 的正根}.$$

J_0 是零阶 Bessel 函数. J_1 是一阶 Bessel 函数.

33* 定解问题为:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\\ u(\rho,0)=0,\quad u(\rho,h)=f(\rho)\\ u(0,z)\text{ 是有限量},\quad u(R,z)=0\end{cases}$$

$$u(\rho,z)=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{\lambda_n z}{R}}{\operatorname{sh}\frac{\lambda_n h}{R}}\cdot\frac{J_0\left(\lambda_n\frac{\rho}{R}\right)}{J_1^2(\lambda_n)}\int_0^R rf(r)J_0\left(\lambda_n\frac{r}{R}\right)dr$$

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 是 $J_0(\lambda)=0$ 的正根, J_1 是一阶 Bessel 函数.

第三章 答 案

1 (1) $F(\lambda)=\begin{cases}\pi, & |\lambda|<a\\ \dfrac{\pi}{2}, & |\lambda|=a\\ 0, & |\lambda|>a\end{cases}$ (2) $F(\lambda)=\sqrt{\dfrac{\pi}{\eta}}e^{-\frac{\lambda^2}{4\eta}}$

(3) $F(\lambda)=\sqrt{\dfrac{\pi}{\eta}}\cos\left(\dfrac{\lambda^2}{4\eta}-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $F(\lambda)=-\sqrt{\dfrac{\pi}{\eta}}\sin\left(\dfrac{\lambda^2}{4\eta}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(4) $F(\lambda)=\dfrac{2a}{a^2+\lambda^2}$

3 定解问题为

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},\quad -\infty<x<+\infty,\ 0<t\\ u(x,0)=Te^{-\alpha|x|}\end{cases}$$

解为

$$u(x,t)=\frac{2aT}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2\lambda^2t}}{a^2+\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda$$

4　定解问题为

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<+\infty,\ 0<t\\ u(x,0)=e^{3-x}\\ u(0,t)=0\end{cases}$$

解为

$$u(x,t)=\frac{2e^3}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda}{\lambda^2+1}e^{-a^2\lambda^2t}\sin\lambda x d\lambda$$

5　(1) $u(x,t)=e^{-a^2t}\cdot\sin x$

(2) $u(x,t)=x^2+1+2a^2t$

6　$u(x,t)=\dfrac{aQ}{k\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\tau$

7　$u(x,y)=xy+y+1$

8　$u(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}f(\xi)d\xi$

9*　定解问题

$$\begin{cases}y_{tt}=a^2y_{xx}-\dfrac{g}{w}F_0\delta\left(t-\dfrac{x}{v}\right), & 0<x<+\infty,0<t\\ y(x,0)=0, & y_t(x,0)=0\\ y(0,t)=0,\ 当\ x\to+\infty\ 时\ y(x,t)\ 有界\end{cases}$$

其中 g 为重力加速度，w 为弦每单位长的重量，δ 为 δ-函数．其解为

$$y(x,t)=\frac{gv^2F_0}{w(a^2-v^2)}\left[\left(t-\frac{x}{v}\right)u\left(t-\frac{x}{v}\right)-\left(t-\frac{x}{a}\right)u\left(t-\frac{x}{a}\right)\right],\quad v\neq a$$

$$y(x,t)=-\frac{gF_0x}{2wa}u\left(t-\frac{x}{a}\right),\quad v=a$$

10*

$$u(x,t)=\frac{Aa}{E\omega}\frac{\sin\dfrac{\omega}{a}x\cdot\sin\omega t}{\cos\dfrac{\omega l}{a}}+\frac{2a\omega A}{El}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\sin k_nx}{\omega^2-k_n^2a^2}\frac{\sin ak_nt}{k_n}$$

其中 $k_n=\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}$，　$\omega\neq ak_n$．

11　(1) $u(x,t)=a(x^2+a^2t^2)+\dfrac{1}{2a}[\operatorname{arc\,tg}(x+at)-\operatorname{arc\,tg}(x-at)]$

(2) $u(x,t)=\alpha\sin\beta x\cos a\beta t+\frac{1}{2a\omega}\Big[(x+at)\operatorname{ch}\omega(x+at)$

$-(x-at)\operatorname{ch}\omega(x-at)-\frac{\operatorname{sh}\omega(x+at)-\operatorname{sh}\omega(x-at)}{\omega}\Big]$

12　$u(x,t)=\frac{1}{2a}[\operatorname{arc\,tg}(x+at)-\operatorname{arc\,tg}(x-at)]+$

$+\frac{1}{4a^2}\left[e^{t-\frac{x}{a}}\int_{x-at}^{x}\frac{e^{\frac{\tau}{a}}}{1+\tau^2}d\tau-e^{t+\frac{x}{a}}\int_{x}^{x+at}\frac{e^{-\frac{\tau}{a}}}{1+\tau^2}d\tau\right]$

13　$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau$

14*　$u(x,y,t)=e^{-2a^2t}\cdot\sin x\sin y$

提示　令解 $u(x,y,t)=u_1(x,t)\cdot u_2(y,t)$，其中 $u_1(x,t)$、$u_2(y,t)$ 分别为：一维热传导问题的解：

$$\begin{cases}u_{1,t}=a^2u_{1,xx}\\u_1(x,0)=\sin x,\end{cases}\qquad\begin{cases}u_{2,t}=a^2u_{2,yy}\\u_2(y,0)=\sin y\end{cases}$$

第四章　答　案

2　$u(x,y)=\frac{1}{6}x^3y^2+\cos y-\frac{1}{6}y^3+x^2-1.$

4　$u(x,t)=t\sin x.$

5　$u(x,t)=x+t.$

6*　$u(x,y)=3x^2+y^2.$

7*　当 $x-3t\geqslant0$ 时，$u(x,t)=\frac{1}{3}\cos x\sin 3t$；当 $x-3t\leqslant0$ 时，

$u(x,t)=\frac{1}{3}\cos 3t\sin x.$

8*　$u(x,y)=\frac{1}{2}[h(x-2\sqrt{-y})+h(x+2\sqrt{-y})]\ (y<0)$．提示：作替换：$\xi=x-2\sqrt{-y}$，$\eta=x+2\sqrt{-y}$.

9　提示：求

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\\u(r,0)=\varphi(r),\ u_t(r,0)=\psi(r)\end{cases}$$

的解.

11 $u(x, y, z, t)=(x^2+yt)t+yt^2$.

12 提示：在三维波动方程中，令 $u(x, y, z, t)=e^{\frac{cz}{a}}v(x, y, t)$.

第五章 答 案

5 $u(x, y)=-\frac{1}{12}xy(x^2+y^2-a^2)$

6 $u(r, \theta, \varphi)=3r^2\cos 2\theta+r^2$

7 $u(r, \theta)=a^2-r^2$ 或 $u(x, y)=a^2-(x^2+y^2)$

8 $u(x, y)=\frac{u_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right)\right]$

9 (1) $G(M; M_0)=\ln\frac{r_0 r_{MM_1}}{R r_{MM_0}}-\ln\frac{r_0 r_{MM'_1}}{R r_{MM'_0}}$

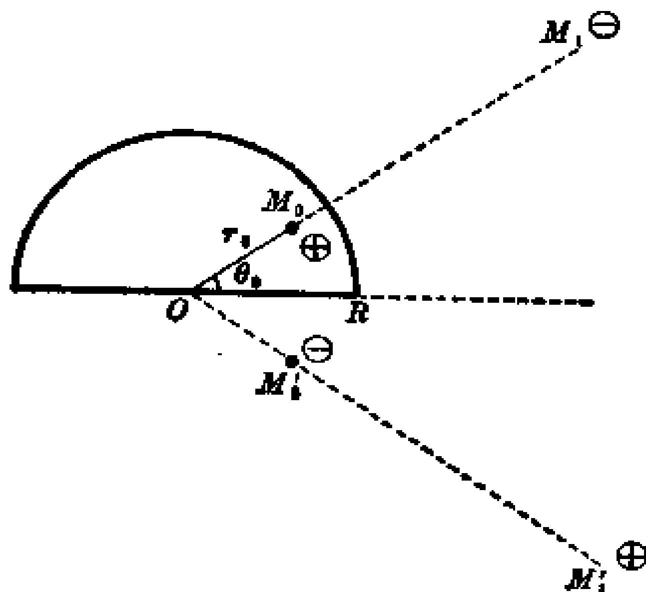
其中 $M_0(r_0, \theta_0)$, $M'_0(r_0, 2\pi-\theta_0)$, $M(r, \theta)$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$

如图

$$(2)\quad G(M; M_0)=\left(\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{R}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right)-\left(\frac{1}{r_{MM'}}-\frac{R}{r_0}\frac{1}{r_{MM'_1}}\right)$$

其中 $M_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, $M'_0(r_0, \pi-\theta_0, \varphi_0)$, $M(r, \theta, \varphi,)$

$$\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right).$$



第 9 题图

第六章 答 案

1 (2)当(6.1.8), (6.1.14), (6.1.24)中令 $f_{i,k}=0$ 时就得出差分方程. 边界结点值: $U_{0,k}=0$ ($x=0$ 边), $U_{N,k}=0$ ($x=\pi$ 边), $U_{i,0}=0$ ($y=0$ 边), $U_{i,N}-U_{i,N-1}=\frac{\pi}{N}\sin i\frac{\pi}{N}$ ($y=\pi$ 边, $U_{i,N-1}$ 是内结点值).

2

y \ x	±0.40	±0.30	±0.20	±0.10	0
−0.50	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
−0.45	0.3950777	0.6807313	0.7799341	0.8214102	0.8332876
−0.40	0.0000000	0.4014280	0.5732515	0.6499460	0.6723591
−0.35	−0.2454347	0.1754690	0.3891417	0.4916371	0.5223789
−0.30	−0.4014282	0.0000000	0.2319569	0.3508527	0.3874785
−0.25	−0.5040781	−0.1331088	0.1025719	0.2303060	0.2706253
−0.20	−0.5732513	−0.2319564	0.0000000	0.1313916	0.1737240
−0.15	−0.6198516	−0.3030122	−0.0774300	0.0546183	0.0978475
−0.10	−0.6499458	−0.3508522	−0.1313910	0.0000000	0.0435042
−0.05	−0.6668847	−0.3784544	−0.1632108	−0.0326457	0.0108763
0.00	−0.6723588	−0.3874780	−0.1737233	−0.0435034	0.0000000
0.05	−0.6668847	−0.3784540	−0.1632100	−0.0326457	0.0108763
0.10	−0.6499458	−0.3508522	−0.1313910	0.0000000	0.0435042
0.15	−0.6198516	−0.3030120	−0.0774300	0.0546183	0.0978475
0.20	−0.5732513	−0.2319565	0.0000001	0.1313916	0.1737239
0.25	−0.5040780	−0.1331008	0.1025719	0.2303060	0.2706253
0.30	−0.4014282	0.0000000	0.2319568	0.3508526	0.3874785
0.35	−0.2454347	0.1754690	0.3891417	0.4916371	0.5223789
0.40	0.0000000	0.4014284	0.5732515	0.6499460	0.6723590
0.45	0.3950777	0.6807313	0.7799341	0.8214101	0.8332876
0.50	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000

注: ±0.40 表示 x 取 +0.40 与 −0.40, …, 等等。

3 (6.1.8), (6.1.14), (6.1.24)就是结点值的差分方程. 边界结点值: $U_{0,k}=0$ ($x=0$ 边), $U_{N,k}=0$ ($x=1$ 边), $(-3U_{i,0}+4U_{i,1}-U_{i,2})=0$ ($y=0$ 边), $\frac{1}{2h}(U_{i,N-2}-4U_{i,N-1}+3U_{i,N})+U_{i,N}=g_i$ ($y=1$ 边).

4

$$\begin{cases} U_{i,k+1}+U_{i+1,k}+U_{i,k-1}+U_{i-1,k}-4U_{i,k}=0 \\ U_{0,k}=k(3-k),\ U_{4,k}=0,\ U_{i,0}=\sin\frac{i\pi}{4},\ U_{i,3}=0 \end{cases}$$

y \ x	1	2	3
0	0.7071067	1.0000000	0.7071068
0.1	0.7390688	0.9526256	0.6619380
0.2	0.7739898	0.9106138	0.6206922
0.3	0.8105209	0.8732013	0.5829586
0.4	0.8473868	0.8396640	0.5483516
0.5	0.8834023	0.8093229	0.5165100
0.6	0.9174832	0.7815372	0.4870970
0.7	0.9486516	0.7557132	0.4597981
0.8	0.9760365	0.7313010	0.4343226
0.9	0.9988720	0.7077960	0.4104016
1.0	1.016492	0.6847421	0.3877883
1.1	1.028330	0.6617247	0.3662576
1.2	1.033905	0.6383785	0.3456049
1.3	1.032827	0.6143832	0.3256467
1.4	1.024785	0.5894636	0.3062100
1.5	1.009548	0.5633895	0.2871775
1.6	0.9869625	0.5359745	0.2683965
1.7	0.9569489	0.5070752	0.2497685
1.8	0.9195038	0.4765901	0.2312032
1.9	0.8746996	0.4444583	0.2126270
2.0	0.8226863	0.4106582	0.1939810
2.1	0.7636945	0.3752056	0.1752240
2.2	0.6980382	0.3381521	0.1563242
2.3	0.6261185	0.2995824	0.1372650
2.4	0.5484268	0.2596125	0.1180401
2.5	0.4655470	0.2183865	0.0986349
2.6	0.3781567	0.1760732	0.0791215
2.7	0.2870230	0.1328634	0.0594606
2.8	0.1929962	0.0889652	0.0396988
2.9	0.0969980	0.0446004	0.0198672
3.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000

取 $U_{1,1}^{(0)}=1.0834547$, $U_{2,1}^{(0)}=0.7404546$, $U_{3,1}^{(0)}=0.4167881$,
$U_{1,2}^{(0)}=0.8862576$, $U_{2,2}^{(0)}=0.4615758$, $U_{3,2}^{(0)}=0.2195909$

简: $U_{1,1}^{(1)}=1.0834266$, $U_{2,1}^{(1)}=0.74045$, $U_{3,1}^{(1)}=0.4167766$, $U_{1,2}^{(1)}=0.88625$,
$U_{2,2}^{(1)}=0.46155$, $U_{3,2}^{(1)}=0.2196$

赛: $U_{1,1}^{(1)}=1.0834266$, $U_{2,1}^{(1)}=0.7404566$, $U_{3,1}^{(1)}=0.4167908$, $U_{1,2}^{(1)}=0.8862566$,
$U_{2,2}^{(1)}=0.4615783$, $U_{3,2}^{(1)}=0.2195922$

超: $\lambda_B=0.6036$, $\omega_b=1.1127662$, 取 $\omega=1.1$
$U_{1,1}^{(1)}=1.0834568$, $U_{2,1}^{(1)}=0.7404706$, $U_{3,1}^{(1)}=0.4167937$, $U_{1,2}^{(1)}=0.8862706$,
$U_{2,2}^{(1)}=0.4615838$, $U_{3,2}^{(1)}=0.2195938$

5 线性代数方程组的形式为

$$\begin{cases} 4U_{11}-U_{12}-U_{21} = \varphi\left(\frac{1}{3},0\right)+\varphi\left(0,\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9}f_{11} \\ -U_{11}+4U_{12}-U_{22}=\varphi\left(\frac{1}{3},1\right)+\varphi\left(0,\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{9}f_{12} \\ -U_{11}+4U_{21}-U_{22}=\varphi\left(\frac{2}{3},0\right)+\varphi\left(1,\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9}f_{21} \\ -U_{12}-U_{21}+4U_{22}=\varphi\left(1,\frac{2}{3}\right)+\varphi\left(\frac{2}{3},1\right)-\frac{1}{9}f_{22} \end{cases}$$

其系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

为对称正定矩阵.

6

$y \backslash x$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	1.199999	1.000000	1.000000	1.000000
$\frac{1}{6}$	1.651080	1.236220	1.099778	1.000000
$\frac{1}{3}$	1.906232	1.386339	1.163337	1.000000
$\frac{1}{2}$	1.989427	1.437166	1.185132	1.000000

$\frac{2}{3}$	1.906232	1.386339	1.163337	1.000000
$\frac{5}{6}$	1.651080	1.236220	1.099778	1.000000
1	1.199999	1.000000	1.000000	1.000000

7

y \ x	± 1	$\pm\frac{2}{3}$	$\pm\frac{1}{3}$	0
−1	0.3051023	0.4068030	0.4641256	0.4822342
−2/3	0.4068030	0.5424040	0.6188342	0.6429790
−1/3	0.4695468	0.6260650	0.7147169	0.7424051
0	0.4998595	0.6664790	0.7604521	0.7888050
1/3	0.4755828	0.6341104	0.7165928	0.7344442
2/3	0.4235439	0.5647252	0.6260098	0.6293759
1	0.3190792	0.4235439	0.4695073	0.4720319

注：±1表示x取+1与−1，…，等等。

第七章 答 案

1.2

j \ k	1(9)	2(8)	3(7)	4(6)	5
0	0.0900000	0.1599999	0.2099999	0.2400000	0.2500000
1	0.0870900	0.1566666	0.2066734	0.2366675	0.2466668
2	0.0845080	0.1533333	0.2033620	0.2333378	0.2433346
3	0.0821842	0.1500925	0.2000770	0.2300135	0.2400043
4	0.0800670	0.1469753	0.1968238	0.2266970	0.2366777
5	0.0781176	0.1439866	0.1936095	0.2233942	0.2333568
6	0.0763066	0.1411213	0.1904388	0.2201060	0.2300441
7	0.0746114	0.1383708	0.1873151	0.2168367	0.2267422
8	0.0730142	0.1357253	0.1842407	0.2135893	0.2234540
9	0.0715011	0.1331757	0.1812168	0.2103669	0.2201822

注：1(9)表示k取1与9，…等等。

3　(1)　$\lambda=\frac{\tau}{h^2}=\tau N^2$, 稳定性条件为 $\lambda\leqslant\frac{1}{2}$, 显示差分格式:

$$\begin{cases}U_{k,j+1}=\lambda U_{k+1,j}+(1-2\lambda)U_{k,j}+\lambda U_{k-1,j}\\ U_{k,0}=\sin\pi kh\\ U_{0,j}=U_{N,j}=0\end{cases}$$

(3)

j \ k	1(9)	2(8)	3(7)	4(6)	5
0	0.3098169	0.5877852	0.8090169	0.9510565	1.0000000
1	0.3040560	0.5[illegible]490	0.7960301	0.9357895	0.9839473
2	0.2991755	0.5690657	0.7832517	0.9207677	0.9681524
3	0.2943730	0.5599307	0.7706785	0.9059869	0.9526110
4	0.2896475	0.5509424	0.7583071	0.8914435	0.9373190
5	0.2849979	0.5420983	0.7461343	0.8771335	0.9222720
6	0.2804230	0.5333962	0.7341569	0.8630532	0.9074679
7	0.2759214	0.5248338	0.7223718	0.8491990	0.8929007
8	0.2714922	0.5164089	0.7107758	0.8355671	0.8785673
9	0.2671340	0.5081190	0.6993660	0.8221540	0.8644640
10	0.2628458	0.4999625	0.6881394	0.8089560	0.8505871
11	0.2586265	0.4919368	0.6770930	0.7959705	0.8369329
12	0.2544748	0.4840399	0.6662239	0.7831931	0.8234980
13	0.2503899	0.4762698	0.6555292	0.7706200	0.8102787
14	0.2463704	0.4686241	0.6450063	0.7582500	0.7972716
15	0.2424150	0.4611018	0.6346522	0.7460785	0.7844733

注: 1(9)表示 k 取 1 与 9, … 等等。

4　显式差分格式: $\lambda=\frac{\tau}{h^2}$, $x_k=kh$,

$$\begin{cases}U_{k,j+1}=\lambda\left(1+\frac{h}{2}\right)e^{x_k}U_{k+1,j}+(1-2\lambda e^{x_k})U_{k,j}+\lambda\left(1-\frac{h}{2}\right)e^{x_k}U_{k-1,j}\\ U_{k,0}=x_k(1-x_k)\\ U_{0,j}=U_{N,j}=0\end{cases}$$

5　六点差分格式:　　$\lambda=\frac{\tau}{h^2}$, $x_k=kh$,

$$\begin{cases} -\lambda e^{x_k}U_{k-1,j+1}+2(1+\lambda e^{x_k})U_{k,j+1}-\lambda e^{x_k}U_{k+1,j+1} \\ =\lambda e^{x_k}(1-h)U_{k-1,j}+2(1-\lambda e^{x_k})U_{k,j}+\lambda e^{x_k}(1+h)U_{k+1,j} \\ U_{k,0}=x_k(1-x_k) \\ U_{0,j}=U_{N,j}=0 \end{cases}$$

6　显式差分格式：$\lambda_k=\dfrac{\tau a^2(x_k)}{h^2}$，$x_k=kh$，

$$\begin{cases} U_{k,j+1}=\lambda_k U_{k+1,j}+(1-2\lambda_k)U_{k,j}+\lambda_k U_{k-1,j} \\ U_{k,0}=\varphi(kh) \\ U_{0,j}=U_{N,j}=0 \end{cases}$$

8

j \ k	1(9)	2(8)	3(7)	4(6)	5
0	0.0900000	0.1599999	0.2099999	0.2399999	0.2500000
1	0.0900000	0.1599999	0.2099999	0.2399999	0.2500000
2	0.0753591	0.1414364	0.1903867	0.2201104	0.2300552
3	0.0522667	0.1076304	0.1525090	0.1808589	0.1904847
4	0.0284285	0.0646474	0.0996395	0.1238742	0.1324218
5	0.0079525	0.0195322	0.0373325	0.0527869	0.0587601
6	−0.0099145	−0.0224016	−0.0272991	−0.0260890	−0.0247691
7	−0.0278399	−0.0594236	−0.0874044	−0.1039861	−0.0109128
8	−0.0466584	−0.0925306	−0.1381622	−0.1712066	−0.1330075

注：1(9)表示 k 取 1 与 9，…，等等。

9　显式差分格式(I)：$\lambda=\dfrac{a\tau}{h}$，

$$\begin{cases} U_{k,j+1}=\lambda^2U_{k+1,j}+2\left(1-\lambda^2+\dfrac{b\tau^2}{2}\right)U_{k,j}-U_{k,j-1}+\lambda^2U_{k-1,j} \\ U_{k,0}=\varphi_k, \qquad U_{k,1}=\varphi_k+\tau\psi_k \\ U_{0,j}=\mu_1(j\tau),\ U_{N,j}=\mu_2(j\tau) \end{cases}$$

10

j \ k	0(10)	1(9)	2(8)	3(7)	4(6)	5
0	0.0000000	0.3090170	0.5877852	0.8090169	0.9510565	1.0000000
1	0.0001352	0.3043099	0.5786183	0.7963007	0.9360604	0.9842180
2	0.0005411	0.2999398	0.5698700	0.7840628	0.9215798	0.9689347
3	0.0012176	0.2959080	0.5615374	0.7722996	0.9076107	0.9542352

注：0(10)表示 k 取 0 与 10，…，等等。

第八章 答 案

1 有限元方程

$$\begin{cases} u_{i+1,k}+u_{i,k+1}+u_{i-1,k}+u_{i,k-1}-4u_{i,k}=0 \\ u_{0,k}=u_{10,k}=u_{i,0}=0,\ u_{i,10}=\sin ih \end{cases}$$

数值近似解

y \ x	0.3141 / 2.8274	0.6283 / 2.5132	0.9425 / 2.1991	1.2566 / 1.8854	1.5708
0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.3141	0.0086933	0.0165357	0.0227595	0.0267554	0.0281323
0.6283	0.0182377	0.0346902	0.0477469	0.0561299	0.0590184
0.9425	0.0295672	0.0562403	0.0774081	0.0909987	0.0956817
1.2566	0.0437911	0.0832956	0.1146466	0.1347752	0.1417110
1.5708	0.0623015	0.1185045	0.1631075	0.1917444	0.2016120
1.8854	0.0869104	0.1653135	0.2275345	0.2674820	0.2812481
2.1991	0.1200267	0.2283040	0.3142341	0.3694044	0.3884148
2.5132	0.1648921	0.3136431	0.4316932	0.5074858	0.5336022
2.8274	0.2258983	0.4296841	0.5914090	0.6952435	0.7310223
3.1416	0.3090170	0.5877852	0.8090170	0.9510565	1.0000000

3* 有限元方程 $M\dfrac{du}{dt}+ku=0$

数值近似解

t \ x	0.1 / 0.9	0.2 / 0.8	0.3 / 0.7	0.4 / 0.6	0.5
0	0.0900000	0.1599999	0.2099999	0.2400000	0.2500000
$\frac{1}{600}$	0.0870900	0.1566666	0.2066734	0.2366675	0.2466668
$\frac{2}{600}$	0.0845080	0.1533333	0.2033021	0.2333378	0.2433346
$\frac{3}{600}$	0.0821842	0.1500925	0.2000770	0.2300135	0.2400043
$\frac{4}{600}$	0.0800670	0.1469753	0.1968238	0.2266970	0.2366777
$\frac{5}{600}$	0.0781176	0.1439866	0.1936095	0.2233942	0.2333568

$$
M=\frac{1}{6\times 10}\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix},
$$

$$
K=10\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}
$$

第九章 答 案

1 (1)椭圆型 (2)椭圆型 (3)双曲型 (4)抛物型 (5)抛物型

2 (1)$x=0$ 或 $x=4y$ 为抛物型；$x>0, x>4y$ 或 $x<0$, $x<4y$ 为双曲型；$x>0, x<4y$ 或 $x<0, x>4y$ 为椭圆型.

(2) 双曲型.

(3) $xy<0$ 为双曲型； $xy>0$ 为椭圆型； $xy=0$ 为抛物型.

(4) $xy>0$ 为双曲型； $xy<0$ 为椭圆型； $xy=0$ 为抛物型.

(5) $x+y\neq 0$ 时为椭圆型； $x+y=0$ 时为抛物型.

(6) $x\neq 0$, $y\neq 0$ 时为椭圆型； $x=0$ 或 $y=0$ 时为抛物型.

(7) $x\neq 0$, $y\neq 0$ 时为双曲型； $x=0$ 或 $y=0$ 时为抛物型.

3 (1) $u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}u_\xi=0,\ \xi=x+y,\ \eta=3x-y$

(2) $\eta^2 u_{\eta\eta}=0,\ \xi=\frac{y}{x},\ \eta=y.$

(3) $y>0$ 时，$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\eta}u_\eta=0,\ \xi=x,\ \eta=\frac{2}{3}y^{3/2}$； $y=0$ 时，$u_{xx}=0$；

$y<0$时，$u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)=0,\ \xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2},\quad \eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}.$

(4) $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0,\quad \xi=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad \eta=\ln(y+\sqrt{y^2+1}).$

(5) $u_{\xi\eta}+\frac{\eta+\xi}{32}(u_\xi+u_\eta)=0$, $\xi=y+\sin x-2x$, $\eta=y+\sin x+2x$.

(6) $u_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{\eta^2}u_\xi=0$, $\xi=y\sin x$, $\eta=y$.

4* $u(x,y)=\varphi_1(x-2\sqrt{-y})-\varphi_2\left(\frac{x}{2}-\sqrt{-y}\right)+\varphi_2\left(\frac{x}{2}+\sqrt{-y}\right)$.

提示：将方程化成标准形式，求出“通解”

$$u(x,y)=F(x-2\sqrt{-y})+G(x+2\sqrt{-y}),$$

再确定其中的任意函数 F, G.

(5) $u_{\xi\eta}+\frac{\eta+\xi}{32}(u_\xi+u_\eta)=0$, $\xi=y+\sin x-2x$, $\eta=y+\sin x+2x$.

(6) $u_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{\eta^2}u_\xi=0$, $\xi=y\sin x$, $\eta=y$.

4* $u(x,y)=\varphi_1(x-2\sqrt{-y})-\varphi_2\left(\frac{x}{2}-\sqrt{-y}\right)+\varphi_2\left(\frac{x}{2}+\sqrt{-y}\right)$.

提示：将方程化成标准形式，求出“通解”

$$u(x,y)=F(x-2\sqrt{-y})+G(x+2\sqrt{-y}),$$

再确定其中的任意函数 F, G.